سلسلة التجديدات الرياضية والنشاطية
والتدريسية لتطوير الرياضيات المدرسية

١

معلم الرياضيات والتجديدات الرياضية
«هندسة الفراكتال
وتنمية الابتكار التدريسى لمعلم الرياضيات»

أ.د. نظلة حسن أحمد خضر
كلية التربية، جامعة عين شمس
Ph. D. Lond. Univ-

الناشر
عالم الكتب
٢٠٠٤

عالم الكتب
نشر . توزيع . طباعة

❖ الإدارة :
16 شارع جواد حسنى - القاهرة
تليفون : 3924626
فاكس : 002023939027

❖ المكتبة :
38 شارع عبد الخالق ثروت - القاهرة
تليفون : 3926401 - 3959534
ص . ب 66 محمد فريد
الرمز البريدى : 11518

❖ الطبعة الأولى
1424 هـ -- 2004 م

❖ رقم الإيداع 21043 / 2003

❖ الترقيم الدولى I.S.B.N
977 - 232 –387 -7

❖ الموقع على الانترنت : WWW.alamalkotob.com

❖ البريد الإلكترونى : info@alamalkotob.com

تقديم

لتنمية الابتكار التدريسى لمعلم الرياضيات نحاول أن نجعل المعلم يعايش التفكير الرياضى الابتكارى المتجدد الذى أنتج هندسة معاصرة تتسم بسمات متطلّبة فى تطوير الرياضيات المدرسية للقرن الواحد والعشرين. وذلك لكونها أكثر حيوية، وأكثر واقعية وأكثر إتاحة وأكثر معلوماتية وأكثر حداثة... بالاضافة إلى أنها تمتلك ذاتياً صفات يمكن استغلالها لتنمية النواحى الابتكارية للمتعلم، وذلك يرجع لروابطها connections بالطبيعة والفن والتكنولوجيا المتقدمة والعلوم الأخرى المعاصرة. وأيضاً لجذورها فى أعمال ابتكارية خلاقة لرياضيين حديثيين.

هذه الهندسة هى هندسة الفراكتال Fractal Geometry (التى قد تسمى هندسة الفتافيت أو الكسريات) التى تبلورت فى نهاية السبعينيات ثم بدأ الاهتمام بها فى الثمانينات والتسعينيات خاصة وأنها إرتبط نموها بالهيولية (أو چوازا الفوضى) Chaos التى أحدثت ثورة علمية جعلت من النظرية النسبية نظرية عتيقة. بالاضافة إلى أنها وجهت الاهتمام بدقائق الأمور والتصرفات الديناميكية اللاخطية التى حلت مشكلات علمية وتكنولوجية عصرية كان يتجاهلها العلماء والرياضيون من قبل. وحديثا منذ حوالى سنتين فى (٢٠٠٢) بدأ الاهتمام فى البلاد المتقدمة بإقتراح إدراج هندسة الفراكتال فى مقررات الرياضيات لإعداد معلم الرياضيات أو فى برامج تدريب معلمى الرياضيات أثناء الخدمة. وفى محاولة لتبسيط تقديم هذه الهندسة لمعلم الرياضيات مع الإحتفاظ بالمعالجات الرياضية ليتثنى له تطوير الرياضيات المدرسية مادة وطريقة، قمت بتأليف هذا الكتاب.

وهو كتاب تعليمى هادف وليس مجرد سرد لمفاهيم وعلاقات وأفكار رياضية.. وعلى ذلك استخدمت كل خبرتى فى تنمية النواحى الابتكارية الرياضية فى كتبى

للصغير والكبير، ونتائج أبحاثى وأعمالى فى هذا الصدد فى عرض محتوى الكتاب، وأيضاً ليعكس اهتماماتى وإعجابى بهذه الهندسة العصرية غير العادية والغريبة. وكان ذلك بإثارة وحفز معلم الرياضيات على تنمية استقلالية التعلم لديه، وعلى تحريك وتنمية قدراته ومقدراته الابتكارية فى الرياضيات ليجعل عملية تعليمها وتعلمها ممتعة وجذابة وخلاقة، حتي يعيد ثقة التلاميذ (والطلاب) فى الرياضيات ويقبلوا على دراساتها بحب وحماس وفهم. وبذلك يعيدون مجد أجدادهم فى عبقريتهم الهندسية والإنشائية، خاصة بعد أن انخفضت نسبة الدارسين للرياضيات فى المرحلة الثانوية وانخفض التحصيل فيها بما ينذر بالتخلف الحضارى والثقافى. ومن جهة أخرى يُهيأ المعلم لإستيعاب بعض من الرياضيات العصرية بتقبل وإقتناع وتقدير بالتدريج قبل أن تُفرض عليه كما حدث فى ادخال الرياضيات الحديثة فى الرياضيات المدرسية فى السبعينيات ونتج عنها مشكلات تعلُمية وتعليمية لم تحل حتى الآن.

ويشتمل الكتاب على ثلاثة أبواب. يتضمن **الباب الأول** طبيعة الرياضيات بما فيها الرياضيات العصرية.

الباب الثانى يتضمن خمسة فصول حول هندسة الفراكتال ونشأتها وخصائصها وأفكارها وعلاقاتها، وروابطها بالطبيعة والفن وحلول معادلات مركبة...، ثم كيفية استخدام هندسة الفراكتال لجعل الرياضيات المدرسية أكثر حيوية، وأكثر واقعية، وأكثر اتاحة، وأكثر معلوماتية وأكثر حداثة.. بهدف تطوير الرياضيات المدرسية مادة وطريقة.

وفى نهاية كل فصل قدمنا تعقيباً يدور حول تضمينات وانعكاسات لتنمية الابتكار التدريسى لمعلم الرياضيات.

الباب الثالث يحتوى بعض أعمال لى قدمتها فى مؤتمرات لتربويات الرياضيات، والتوبولوجى، والكتابة للطفل فى عصر العولمة والمعلوماتية، لتنوير معلم الرياضيات بما يجرى على الساحة التعليمية الرياضية والثقافية الرياضية فى إعداد أجيال من الرياضيين الإبتكاريين.

وأخيراً الشكر والحمد لله فى الأولى والأخرة الذى أعاننى على الانتهاء من تأليف هذا الكتاب حول «التجديدات الرياضية»، وأسأله العون فى تكملة الأجزاء حول التجديدات النشاطية، والتدريسية. كما أدعو الله بالرحمة والمغفرة لمن بذر فى نفسى الحب، والدآبة، والعطاء والاستمتاع بما أعمله، خاصة الوالدين والأخت أ. د/ تهانى حسن، ثم أستاذى المبدع فى الرياضيات أ.د/ عبد الحميد لطفى، ثم أ. د/ سعد مرسى، أ.د/ أحمد زكى صالح، ومدام يكن باشا معلمتى فى الثانوى التى كانت تدرس لنا اللغة الفرنسية بدون أى مقابل مادى وتوقعت منى القيام بأعمال كبيرة غير عادية إبتكارية، والزميلة د/ قدرية تمراز وتلميذى د/ محمود السيد، والناشر يوسف عبدالرحمن.

كما أتقدم بالشكر لكل من شجعنى أو ساعدنى على تأليف هذا الكتاب من الأسرة والزملاء والطلاب وبصفة خاصة أ.د/ الهلالى محمد أحمد عيد، د/ غادة الهلالى، د/ رانيا الهلالى، دينا الهلالى، علاء الدين الهلالى، مهندسة/ اسعاد هانم حسن أحمد.

والله ولى التوفيق

المؤلفة

أ.د. نظلة حسن أحمد خضر

سبتمبر ٢٠٠٣

محتويات الكتاب

مقدمة

أصبح التحديث فى كافة المجالات أمر ضرورى لملاحقة التطور المتسارع والانفتاح المعرفى والثقافى فى عصر المعلومات. وعصر تكنولوجيا المعلومات، وتكنولوچيا المعرفة الذكية وآلاياتها الذكية المستخدمة فى شتى النواحى العلمية والصناعية. والحياتية والحربية وفى الفضاء والاستكشافات الكونية....

والجميع مسلم بدور الرياضيات وتجديداتها المستمرة فى دفع عجلة هذا التطور. حيث يتأثر ويؤثر نموها المتجدد بحل مشكلات عصرية تفتح المجال إلى مزيد من التجديدات والانطلاقات والتطور فى المعرفة وتطبيقاتها العصرية.

وقد ظهرت رياضيات عصرية فى العقود الأخيرة أحدثت ثورة كبيرة فى الرياضيات طغت على كل الثورات السابقة. تتميز هذه الرياضيات ومنها هندسة الفراكتال Fractal Geometry بأنها وليدة رياضيات أكثر حداثة وساعد فى نموها التقدم الكبير فى علوم الكمبيوتر وإمكاناته. وتتميز أيضا بتطبيقاتها الواسعة فى تكنولوجيا العصر وبإسهامها فى خلق نظريات علمية ورياضية أحدث مثل نظرية الهيلولية chaos ، ونظرية النظم الديناميكية غير الخطية ... جعلت من النظرية النسبية نظرية عتيقة.

فهل يستدعى ذ لك تنوير معلم الرياضيات بهذه الرياضيات العصرية؟

وإذا كانت هندسة الفراكتال التى تعتبر مثالاً لهذه الرياضيات العصرية ذات خواص تجعلها أكثر حيوية وارتباطاً بالطبيعة nature ومعظم العلوم، وأكثر واقعية، وأكثر إتاحة ولها مذاق فنى رياضى راقى...، ومن الممكن إفادة المعلم منها ليكون

أكثر إبداعاً (ابتكاراً) فى تطوير تدريسه للرياضيات ليكون تعلمها عملية ممتعة جذابة تثير استقلالية تعلم الرياضيات بحب، فهل يستدعى ذلك تنوير معلم الرياضيات بهندسة الفراكتال بصفة خاصة؟

وإذا كانت هندسة الفراكتال لها طبيعة نصف عملية وإنسانية، تختلف عن طبيعة الرياضيات الشكلية أو المنطقية أو الحدسية أو المثالية (البحتوية Purism) أو العملية (البراجماتية)، أو التطبيقية، فهل ذلك يستدعى تنوير معلم الرياضيات بأفكار حول ما هى الرياضيات؟

وإذا كان معلم الرياضيات يحتاج للإطلاع على ما يوسع دائرة ثقافته المهنية ويسهل الاتصال بما يجرى بساحة الندوات العلمية فى الرياضيات التربوية (تدريس الرياضيات) وأعمال روادها، فهل يستدعى ذلك تقديم قراءات لأحد روادها ليكون على صلة دائمة بكل جديد ومفيد له علاقة برسالته النبيلة فى اعداد جيل بعقلية رياضية مبتكرة يساهم فى صنع المعرفة الرياضية المتجددة وتطبيقاتها؟

وفى الواقع ارتداد أعداد الطلبة الدارسين للرياضيات بالتعليم الثانوى علاوة على تدنى مستوى الرياضيات لغالبية التلاميذ فى المراحل المختلفة يُنذر بالتخلف الحضارى والثقافى. كما أنه يوجد ثمة إتجاه لتصنيف الشعوب فى عصر العولمة تبعاً لمستويات تلاميذها (فى المدن.. القرى) فى الرياضيات والعلوم وهذا إنذار آخر بمزيد من التخلف الحضارى والثقافى. ولا يوجد سوى طريق واحد لابد أن نسلكه. وهو الارتقاء بمعلم الرياضيات رياضياً وثقافياً ومهنيا بتنويره بمستحدثات الرياضيات التى لها عائد فى تطوير تدريسه بإبداع (ابتكار)، وبالاستعانة بكل الأساليب التى تجعل تعلم الرياضيات عملية ممتعة مشوقة جذابة مهما كان فيها من تجريد وشكلية، بحيث تدفع مزيد من التلاميذ من الجنسين للاقبال على دراستها بحب وتقدير ورغبة صادقة مدى الحياة.

وعلى ذلك فكرت فى تأليف سلسلة من الكتب تهدف إلى الاثراء الرياضى والثقافى والمهنى لمعلم الرياضيات. وذلك بتقديم تجديدات شاملة فى الرياضيات

والأنشطة والمداخل التدريسية تثير مقدرات معلم الرياضيات الإبداعية (الابتكارية) ليساهم فى تطوير تدريس الرياضيات. وتقع فى ثلاثة كتب (أجزاء).

الكتاب الأول الذى نحن بصدده يحاول الرد على التساؤلات التى أثرتها من خلال ثلاثة أبواب . الباب الأول (بفصل واحد) يشتمل على نبذة عن طبيعة الرياضيات أو بالأحرى يرد على السؤال ما هى الرياضيات؟ وذلك من خلال مدارس الفكر الرياضى (وفلاسفة وعلماء الرياضيات) بما فى ذلك الفكر الرياضى المعاصر. الباب الثانى (من خمسة فصول) يختص بتقديم هندسة الفراكتال كمثال لنتاج الفكر الرياضى العصرى يثير التفكير الرياضى الخلاق والنواحى الفنية والابتكارية. حيث نتعرض لخواص الفراكتال وتوليد الفراكتالات بمولد أو نظم دوال مرحلية التكرار IFS أو الفراكتالات ذات الجاذب الغريب. وذلك مع إبراز الفراكتالات فى الطبيعة وطابعها الواقعى والجمالى، وعلاقة الفراكتالات بحلول المعادلات المركبة (ذات الجذور المركبة) وإظهار شكلها الجمالى. وعلاقة بعض الفراكتالات بالهيوليه Chaos .ثم ننهى هذا الباب بأفكار تختص بكيفية الاستفادة من روح (ملامح وخصائص) هندسة الفراكتال فى تطوير تدريس الرياضيات ليثير التطلع إلى المعرفة الرياضية والنشاط ويرضى الاحساس والوجدان ويشبع العقل بما يساهم فى النمو الشامل للتلميذ ويحببه فى الرياضيات ويحثه على متابعة دراستها.

الباب الثالث (بثلاثة فصول) يساعد المعلم على الاضطلاع على ما يحدث فى ساحة تدريس الرياضيات (الرياضيات التربوية ـ تربويات الرياضيات) من مؤتمرات وندوات علمية أو ما ينشر من أعمال ليس من السهل الحصول عليها. وعلى ذلك قدمت ثلاثة أعمال لى ترتبط بما قدمته فى البابين الأولين. أحدهما قدم فى ندوة لجمعية تربويات الرياضيات بتربية المنوفية فى إبريل ٢٠٠٢ حول حوار الحضارات (الحضارات العربية والإسلامية) بعنوان «دور رياضيات العرب فى تحضين الرياضيات وفى اثارة اختراعات لهندسات أحدث معاصرة» حيث نبين دور رياضيات العرب فى النهضة الرياضية الغربية وفى رياضيات القرن ١٩، ٢٠. والعمل الثانى هو أول كتاب (كتب للصغير والكبير) لتنمية التفكير والابتكارى لسن

١١ سنة فأكثر لسلسلة كتب بعنوان «سحر وغرائب هندسة جديدة» غير موجود بالسوق حاليا. ويشتمل على أفكار عامة بسيطة ومشوقة (للتمهيد لنظرية فى التوپولوچى الجبرى).

والعمل الثالث قدم فى ندوة إقرأ لطفلك - الهيئة المصرية العامة للكتاب ٢٠٠٢ وهو يشتمل على أفكار للكتابة للطفل تعده للعصر الحاضر بعنوان «إقرأ لطفلك ليواكب عصر المعلومات وعصر العولمة».

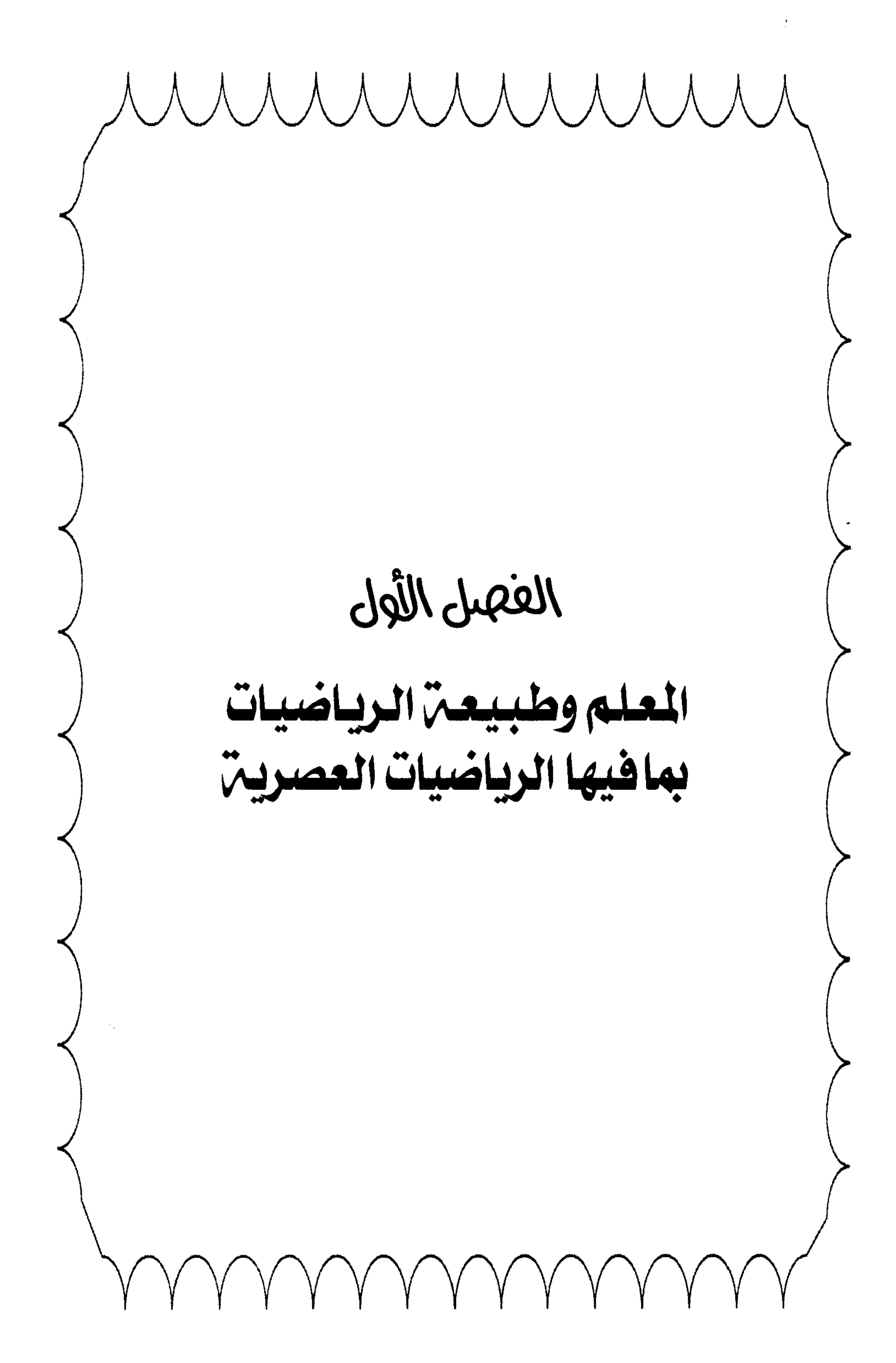
وهذه الأعمال يمكن أن يستفيد منها معلم الرياضيات فى المراحل المختلفة لما تحويه من أفكار ريا ضية وعلمية وتربوية مهنية بالإضافة إلى الإثارة للقراءة الحرة أو اثراء الأنشطة الرياضية... وتنمية استقلالية التعلم له ولتلاميذه...... لتحقيق غاية تنمية عشق الرياضيات والعقلية الرياضية الابتكارية.

وأخيراً أرجو أن يكون هذا الكتاب ذا نفع حقيقى لمعلم الرياضيات وتلاميذه وكل من يهتم بها.



الباب الأول

نبذة حول طبيعة الرياضيات للمعلم



الفصل الأول

المعلم وطبيعة الرياضيات بما فيها الرياضيات العصرية

الفصل الأول

المعلم وطبيعة الرياضيات بما فيها الرياضيات العصرية

مقدمة:

شهدت العقود الثلاثة الأخيرة ثورة كبيرة فى الرياضيات طغت على كل الثورات السابقة. حيث ظهرت ما يسمى بالرياضيات العصرية (أو الرياضيات الموضة Fash-ionable math) . هذه الرياضيات وليدة لنظريات حديثة فى مجالات وأفرع التوپولوچى، ونمت بتقدم علوم الكمبيوتر وأساليبه وتطبيقاته فى الرسوم والنمذجة.

تتميز هذه الرياضيات بتطبيقاتها الواسعة وبدورها الأساسى فى نمو نظريات علمية ورياضية معاصرة مثل نظرية الهيولية (أو جوازاً الفوضى) Chaos ونظرية النظم الديناميكية غير الخطية non linear dynamical Systems والتى قد يسميها البعض بالمتركبات أو التعقدات Complixities جعلت من النظرية السنية، نظرية عتيقة.

ولهذه الرياضيات العصرية دور فى نمو الرسوم البيانية الكمبيوتريه graphics مثل الأشكال الفرضية virtual abjects أو virtual reality . من هذه الرياضيات العصرية ما يعكس الفن الرياضى وأعاجيب الفكر الرياضى المتجدد مثل هندسة الفراكتال Fractal geometry . هذه الهندسة لها ملامح جذابة ساحرة محيرة تثير التفكير الرياضى الخلاق، فهى تمس الإحساس والوجدان وتشبع العقل وتثير الخيال وتحلق بالأفكار بعيداً جداً وقريباً جداً. تحس أنك تعرفها وتألفها لقربها من الطبيعة nature والواقع ثم تقربك إلى أعمال رياضية خلاقة (إبتكارية) لتفسر وتوضح خواصاً لهذه الهندسة من أشكال تستطيع القيام بعملها... فهى تدفعك لتكامل الإحساس مع الأفكار مع العمل وهذا بدوره ينمى العقلية الرياضية الابتكارية (المبدعة).

ولذا فقد وجدت فيها وسيلة ذاتية لتنمية التفكير الابتكارى (المبدع) لمعلم الرياضيات من خلال تنويره بها ولاستثارة دوافعه لتحسين وتحديث الرياضيات المدرسية وتدريسها. فالمعلم هو حجر الزاوية فى أى تطوير أو تحديث خاصة إذا كان نابعاً منه ومقتنعاً به.

ولما كانت هندسة الفراكتال مثالاً للرياضيات العصرية تعكس طبيعة التفكير الرياضى الذى أسهم فى نموها. وهى طبيعة نصف عملية إنسانية تختلف عن طبيعة الرياضيات التى وردت لأصحاب مدارس الفكر الرياضى وهم: الشكليون ـ المنطقيون ـ الحدسيون ـ المثاليون (البحتيويون Purist)، العمليون (البراجماتيون)، التطبيقيون، فهذا يستدعى تقديم نبذة عن هذه المدارس الفكرية لنتعرف على ما هى الرياضيات؟ أو طبيعة الرياضيات لدى كل مدرسة ثم طبيعة الرياضيات العصرية التى يسميها البعض نصف عملية ويصفها البعض بأنها إنسانية. ونتعرض من خلال تقديم أفكار المدارس الفكرية حول طبيعة الرياضيات إلى توضيح انعكاساتها على الرياضيات المدرسية وتدريسها. وذلك لمساعدة المعلم على تكوين رؤية خاصة حول طبيعة الرياضيات (ومنها الرياضيات العصرية) تفيده فى الارتقاء بتدريسه.

١. المعلم وطبيعة الرياضيات. ما هى الرياضيات؟

رؤية معلم الرياضيات حول طبيعتها تحدد إلى حد كبير موقفه تجاه تدريسها من حيث أهميتها أو لماذا يدرسها (الأهداف)، وماذا يدرسها (المحتوى) وكيف يدرسها (الطريقة)، بالإضافة إلى أنها تنمى لديه قيمة الرياضيات التى ينقلها لتلاميذه لتكون سهلة التعلم ومشوقة. تتبلور هذه الرؤية من خلال خبراته وهو طالب يدرس الرياضيات فى المراحل المختلفة وعند تدريسه لها وانعكاساته لآراء الرياضيين والفلاسفة الرياضيين حول الرياضيات.

وتتأرجح الرياضيات بين البحتة Pure، والتطبيقية، وبين الشكلية Formal والحدسية، وبين المجرد والملموس....

والواقع أن «ما هى الرياضيات؟» يعد سؤالا فلسفيا أساسيا تتضارب الآراء حوله

كأى قضية خلافية. فلا يوجد اتفاق وحيد على معنى الرياضيات فالرياضيون والفلاسفة الرياضيون تختلف آراؤهم حول «ما هى الرياضيات»؟

ويظهر هذا الاختلاف فى مقولاتهم عنها ـ أنظر الموقع على الانترنت:

mathfrum.edu/~woodard/mquot.html

فمثلاً يقول الرياضى هالموس(٧): «هى الأمان، اليقين، الصدق، الجمال، البصيرة، التركيب، الهندسة المعمارية. أنا أرى الرياضيات جزءاً من المعرفة الإنسانية التى أسميها الرياضيات كأنها شىء واحد شىء عظيم رائع جليل glorious جداً.

ويقول الرياضى هاردى Hardy(٧): «أنماط الرياضى مثلها مثل الفنان الرسام أو الموسيقى.. يجب أن تكون جميلة، الأفكار مثل الألوان أو الكلمات يجب أن تكون مناسبة Fit (متناسقة) مع بعضها بطريقة هارمونية. الاختبار الأول هو الجمال. لا وجود لمكان دائم فى العالم لرياضيات قبيحة».

ويقول الرياضى الفنان فيرجسون(٧): «إننا نرى جمال الرياضيات فى العقل ونريد أن نبين جمالها للغير» ويقول الرياضى چاكوبىJacobi (٧): «العواطف Passions واحدة.. لا يوجد فرق بين الفنان، والعالم، والشاعر، والرياضى».

ومن جانب آخر يقول پيرى Perry (المهندس)(٧): «دراسة الرياضيات بدأت لأنها مفيدة وأنها تستمر لفائدتها... فهى لها قيمتها فى العالم لفائدتها؛ بينما الرياضيون الذين يدرسونها لذاتها يجمدونها».

المقولات السابقة لرياضيين فى القرن العشرين، الثلاثة الأوائل منهم ينظرون إلى الرياضيات على أنها رياضيات بحتة Pure، الأخير ينظر إلى الرياضيات على أنها رياضيات تطبيقية. لأجل أن يتعرف المعلم على طبيعة الرياضيات نقدم نبذة لأهم التصنيفات الرئيسيةلما تعنيه الرياضيات كما وصفها الرياضيون والفلاسفة لمدارسهم الفكرية وهم:

الشكليون ـ البحتويوين ـ الحدسين ـ المنطقيون ـ العمليون ـ شبه العمليين مع التعرض لتأثر الرياضيات المدرسية وتدريسها بأرائهم.

١-١-الشكليون Formalists - أصحاب الشكلية Formalism

وهم الذين ينظرون إلى الرياضيات على أنها علم النظم الشكلية (الرسمية) -For mal كما يقول كيورى Curry[٤]. ونعنى بالنظم الشكلية التركيبات الرياضية القائمة على مدخل المسلمات (البديهيات) axiomatic approach ، فالنظام الشكلى يتكون من:

(١) مجموعة من الرموز والقواعد (غير الغامضة) لتكوين تقارير لهذه اللغة.

(٢) مجموعة من التقارير نسميها مسلمات (أو بديهيات أو مصادرات).

(٣) نظام للاشتقاق (البرهنة inference يتكون من قواعد غير مبهمة (منطقية) لتحديد متى يتبع (يستنتج) تقرير من تقرير أخر.

(٤) نظريات متتالية لها خطوات محددة تشتق من المسلمات، والفن الرياضى عند الشكليين يتمثل فى الاستنتاج الشكلى. فهم يرون أن تعاقب الخطوات فى البرهنة (والاستنتاج) لها ايقاع rhythm وموسيقى.

وقد أفردت جزءاً كبيراً لتوضيح النظم الشكلية من خلال تقديم التركيبات الرياضية القائمة على الطريقة البديهية التى تميز الرياضيات الحديثة[١].

الهجوم على الشكليين ناتج عن مسؤوليتهم عن المشكلات التربوية للرياضيات الحديثة المدرسية. حيث يُلام الأستاذة الجامعيون الذين قرروا تدريس الرياضيات المدرسية بالطريقة البديهية (بطريقة المسلمات) axiomatically. ثم قاموا بالتأثير على المعلمين والكتاب والناشرين ليتبنوا وجهة نظرهم. إلا أن بعض الشكليين يُعزى سبب ضعف التلاميذ الزريع فى الرياضيات الحديثة إلى الضعف الزريع فى اثارة دوافع وحوافز التلاميذ لتعلمها. ويدافعون عن موقفهم فيقولون أن الرياضيات الحديثة (الشكلية) المدرسية أنتجت أكبر عدد من الرياضيين أكثر من أى عصر سابق.

ومن ثم عند ادخال أى تجديدات رياضية فى المناهج المدرسية يستحسن أن نهتم أولاً بتنمية الدافعية والحماس وتحفيز المعلم وتشويقه إلى معرفتها والاقتناع بها ثم

تمكنه منها. وذلك حتى لا نعيد مأساة التسرع بإدخال الرياضيات الحديثة المدرسية فى السبعينات.

١-٢- البحتويون Purists (المثاليون،الأفلاطنيون) .أصحاب البحتية Math. Purism

يهتم البحتويون (أصحاب الرياضيات البحتة) بالحقيقة أو الصدق truth الرياضى. فهم يعتقدون أنه يمكن التوصل إلى الصدق الرياضى وتمييزه بدون النظم الشكلية (أو بالنظم الشكلية).

فمثلا فرض الاتصالية الذى ينص على أن «كل مجموعة جزئية من الأعداد الحقيقية يتشاكل (التناظر ١ ـ ١) مع إما الأعداد الطبيعية أو الأعداد الحقيقية «يعتبر حقيقة مطلقة ولو أنه اتضح أننا لا يمكن برهنته أو عدم برهنته من خلال النظم الشكلية.

وترجع وجهات نظر البحتويون إلى أفلاطون والفلاسفة الإغريق الذين يرون أن أهمية الرياضيات ترجع لذاتها ولتنمية التفكير دون أى تطبيقات. فمثلا يقول أفلاطون [٧]«والآن عند ذكرنا لدراسة الحساب، فإنه يتراءى لى كم هو وسيلة رقيقة وذكية واسعة المنفعة لهدف دراسته لذاته ولمصلحة المعرفة وليس لغايات تجارية... فهو يسحب ويرقى العقل إلى أعلى».

وعموماً فمعظم الرياضيين البحتويين mathematical Purists يعتبرون الرياضيات كشكل موضوعى من المعرفة. كتركيب مركب لأفكار تتصل مع بعض بواسطة البرهان والفكر الاستدلالى rational. ويقدرون اسهاماتهم فى التراث الحضارى. ينظرون إليها كأنها فن أكثر منها علم. ويعتقدون أن لها صفات جمالية بالاضافة إلى اهتمامهم بالحقيقة (الصدق) truth الرياضية سواء توصلوا إليها بالنظم الشكلية أو بدونها. وقد لاحظنا فى أقوال البحتويين المذكورة مثل هاردى وغيره إفتنانهم بجمال الرياضيات وإجلالهم لها، ومن حبهم وتعظيمهم للرياضيات فهم يعتذرون عندما يتكلمون عن الرياضيات وليس فى الرياضيات كما فعل هاردى.

هؤلاء البحتويون يرون دور المعلم كناقل فعال لجسم المعرفة الرياضى لذاتها

وليس لتطبيقاتها. وذلك لتنمية التفكير الرياضى والصرامة rigour والدقة والجمال الرياضى elegance. وعلى المعلم أن يكون متحمساً لمادته.

وأكثر الانتقادات التربوية للفكر البحتوى فى المناهج المدرسية، أنهم ينظرون النظرة التقليدية (منذ الإغريق) بأن الرياضيات ليست للجميع وينعكس ذلك على الاهتمام بالمتفوقين والمسابقات الرياضية. وأن طرق التدريس تتجه إلى الطرق التقليدية (طريقة المحاضرة)، والمغالاة فى تنمية التفكير على حساب الفوائد التطبيقية وعلى حساب تنمية المهارات الاجتماعية.

١-٣- الحدسيون - أصحاب الفكر الحدسى Intuitionism

بينما يهتم البحتويون بالحقيقة (الصدق) الرياضية؛ فإننا نجد الحدسيين يهتمون بالمعنويات (أو الأخلاقيات) الرياضية فهم يعتقدون أن رياضيات معينة تكون لائقة (مناسبة) Proper وبعضها غير لائق، فمثلا يعتبرون أن مبدأ استبعاد الوسط:

excluded middle الذى ينص على أن «أى تقرير رياضى إما صواب وإما خطأ» ليس له تبرير.

أما الشكليون فهم محايدون حول الصدق. فالصدق لديهم هو صدق نسبى يعتمد على مسلمات وقواعد النظام.

وقد ينشد الشكليون الصدق أو الحق. فيفضل أحدهم نظاماً شكلياً على نظام شكلى آخر على أساس معنوى (أخلاقى) أو دينى أو سياسى. إلا أنهم لا يقولون شيئاً عما إذا كانت الرياضيات جيدة أو رديئة. عموماً فالحدسيون يعيبون على الشكليين بأن الرياضيات عندهم قد تكون مناسبة أو لا طعم لها.

ويمكن أن تنعكس أفكار الحدسيين على الرياضيات المدرسية بأن نجعلها ذات معنى ومناسبة للمتعلمين.

١-٤- المنطقيون - أصحاب الفكر المنطقى Logicism

يبدو أن المنطقيين يشبهون الشكليين فهم يخضعون كل الرياضيات للمنطق ويهتمون باشتقاق تقرير من تقرير.

وعمـوماً بـالرغم مـن الاختـلافات بـين الشكـليـين، والبحـتويـين، والحدسـين، والمنـطقيين إلا أنـه يوجد تـوافق بيـنهم. فبـينمـا البحـتويون يريـدون أن يقولـوا عن الرياضيات متى تكون صادقة (صائبة) true فالحدسيون يريدون أن يقولوا متى تكون جيدة والمنطقيـون يريدون أن يقولوا من أين جاءت والشكليـون يريدون أن يقولوا ما هو النظام الشكلى (المعتمد على أسلوب المسلمات).

وصدى المنطـقيين فى الرياضيـات المدرسية هو الاهتمـام بطبيعة البـرهان وأسسه المنطقية والمعالجة المجردة من الرسمية للرياضيات.

١-٥- العمليون - أصحاب الفكر العملى empiricism أو البرجماتيون - Pragmotism

وهم يعـتبرون الرياضيـين كعلماء عمـليين empirical Scientists أو تجريـبيـين شأنهم شأن عـلماء الفيزياء والنبـات والأحياء..... وقد يوضح البعـض أوجه الشبه بين العلم والرياضـيات. إلا أن أهم شيء ليست أن الرياضيات تتقـاسم (تتشابه) مع الفيزيـاء والعلوم. فى إجراءات الاكـتشاف heuristics ولكن لأن لـها طرقًا فـريدة للفهم.

صدى هذه المجمـوعة هو استخدام طرق الاكتـشاف والاستقراء العلـمى والطرق المعملية فى تدريس الرياضيات.

١-٦- التطبيقيون أو البراجماتيون الصناعيون - أصحاب البراجماتية الصناعية - industrial Progmatism

تهتـم هذه المجموعـة بجعل الـرياضيات ممـكنة للجـميع لفـوائدها التـطبيقـية فى المجالات المختلفة. وهذا يـؤدى إلى النمو المهنى للتلاميذ عن طـريق الرياضيات. هذه المجموعة ترى الـرياضيات كمجموعة مبنـيّة من التكنيات (الأساليـب) والمهارات التى يمكن تطبيقها فى سياقات علمية وتكنولوجية (تكنية) على مدي واسع. فهم يرون أنه يوجد جسم من المعرفة الرياضية يجب تعلمها لكى تطبق.

والمـعاصـرون(٧) منهم يرون الرياضـيات كبناء اجتماعى تجريبى تـنمو بالابتكار الإنسانى وعمل القرارات، وترتبط بمجالات المعرفة والثقافة والحياة الاجتماعية.

فالتلاميذ يجب أن يمارسوا الرياضيات ويتعاملوا معها كأن لها إرتباطاً بحياتهم، ولأهميتها فى التعامل مع قضايا اجتماعية أوسع تقربهم من المجتمع.

وهم يرون دور المعلم كمسهل لتعلم التلاميذ فى وضع وحل مشاكلهم. وذلك بتوفير الفرص لمشاركتهم فى صنع القرار حول تعلمهم وتساؤلاتهم لمقرراتهم الرياضية ويستخدموا المصادر الموثوق بها فى بيئتهم من مجلات ومصادر لجمع بيانات واقعية. والتحذير من استخدام أساليب تقويم تسىء إلى بعض جماعات من التلاميذ غير متوافقة اجتماعية.

٧-١- أنصاف العمليين (أنصاف البراجماتيين) - أصحاب الفكر النصف عملى - Quasi - empiricism

بينما حاولت الفلسفات للمجموعات السابقة وضع أساس لجانب أو نوع ما للرياضيات فقد رفض أنصاف العمليين الحاجة لهذا الأساس. فالرياضيات لديهم هى أساساً ما يقوم بعمله الرياضيون، وليس بالضرورى أن تعتمد على أساس فلسفى؛ ولكنها تتوقف على خصائص الزمان والمكان. فهم يرون الرياضيات وكأنها مغامرة حضارية ويتصرف الرياضيون كأنهم علماء فى وقت ما وفنانون فى وقت آخر. ولكى نفهم الرياضيين يجب ملاحظتهم لنعرف أوجه التشابه والاختلاف بينهم وبين بقية الناس. فالسؤال الأنسب لديهم «ليس ما هى الرياضيات؟» ولكن «ما هو المعنى لعمل الرياضيات؟».

وتنقد هذه المجموعة الشكليين لأن الرياضيات التى يعملونها تعتبر مباريات لا معنى لها meeningless game[٣].

فمثلاً يقول دافيز Davis، هيرش[٧] Hersh من رياضى هذه المجموعة النصف عملية:

«الرياضيات لها موضوع Subject matter وتقاريرها لها معنى. الا أن المعنى يتوقف على الفهم المشترك للبشر، وليس أنه حقيقة أبدية غير انسانية. وفى هذا الصدد فان الرياضيات تكون كعقيدة (مذهب idealogy)، دين، أو شكل فنى. فهى

تتعامل مع المعانى الإنسانية، وهى فكرية (عـقلية) فقط فى سياق ثقافى. وبلغة أخرى الرياضيات انسانية... فهى من ضمن العلوم الإنسانية humanistics».

وفى نظرهما تكون الرياضيات عرضة للخطأ Fallible، ولكنها تُصـحح فى نتاج الفكر الإنسانى الذى يوجد جذوره فى الثقافة الإنسانية.

ولما كان روبين هيـرش المنتمى إلى هذه المجمـوعة (النصف عمليـين) هو من أحد الرياضيين المعاصرين المتشبع بالرياضيـات العصرية وقد أصدر كتاباً حديثاً بعنوان ما هـى الريـاضيـات حقـا؟ ـ What is mathematics really? يبـلور فـيه فـكر هـذه المجموعة، فـإننى أقدم معنـى الرياضيات عنـده التى أوردها فى هذا الـكتاب. وذلك ليعكس ما هى الرياضيات؟ بما فيها الرياضيات العصرية.

٢.ما هى الرياضيات حقاً؟ - فى رأى روبين هيرش الرياضى المعاصر

فى شـبابه قـرأ روبين هـيرش[٣] Rubin Hersh كتـاب «ما هى الـرياضـيات؟» لكورانت وروبينز الذى صدر فى الخمسينيات وتأثر به وتعجب منه. وبعد عدّة عقود إنتقده لأنه لم يُجب على السؤال ولكن عرض بـعضًا من محتوى الرياضيات الحديثة آنذاك.

وفى محاولة للإجابة عن السؤال ألف كتاب[٣] من وحى حبه للرياضيات بعنوان «ما هـى الريـاضيـات حقـا؟». حيـث قدم فـيه مـسمـى «إنسـانيـة الريـاضيـات» أو «الرياضيات الإنسانية» math humanistic. ويعنى بتسمية الرياضيات إنسانية أربعة افتراضات مترابطة مـجملها أن الرياضيات هى ما يعملـها الناس. وهذه الافتراضات هى:

(١) الرياضيات بما فيها الرياضيات العصرية (الرياضيات الموضعة الحالية Current-ly Fashionable) يتغير مع الزمن.

(٢) الرياضـيات هى أيضـاً دالة للمـكان (بالثـقافة والنـواحى الاجتمـاعية). أى أن الرياضيات سياسية.

(٣) ما سبق يتضمن أخطاء، أى أن الرياضيين يخطئون Fallible ولكن يصححون الأخطاء.

(٤) الرياضيون يتفاعلون مع بعضهم البعض. أى أن الرياضيات هى شىء يعمله الناس معاً. (بمعنى أن الرياضيات اجتماعية).

وقد ذكر هيرش أنه «لا حاجة للبحث عن معنى دقيق مختفى أو تعريف للرياضيات خارج معناها الاجتماعى ـ التاريخى ـ الثقافى».

ويعتبر هيرش أن أفكارنا الرياضية تناظر match عالمنا بنفس السبب الذى تناظر رئتنا الغلاف الجوى».

وربما يقصد بذلك أن الأفكار الرياضية تبعث الحياة (أو أساسية للحياة) مثلها مثل الهواء الذى يدخل الرئة.

إلا أننى أعتقد أن ذلك ليس كافياً لأن تكون الرياضيات إنسانية. فالرياضيات تكون إنسانية عندما يكون صاحبها (الرياضى) أكثر حساسية واستشعاراً ويتعامل معها كأنها مليئة بالحياة وكأنها مولود جديد يترعرع بين يديه. فكما يقول أحد الرياضيين[٥] «الرياضيات تمس وتضرب وتراً في مشاعرى وقلبى». علاوة على ذلك، التعامل مع الرياضيات يكون تفاعلاً حقيقياً عندما يمس الاحساس والوجدان ويشبع العقل. أى تفاعل مع كل كينونة الفرد المحب والمقدر للرياضيات.

بالاضافة فإننى أعتقد أن الرياضيات إنسانية لأنها فطرية. فكما ذكرت[٢]: «الجنين فى بطن أمه أول حاسة تبدأ فى النمو هى السمع وأول ما يسمع نبض قلب أمه الذى يرمز إلى الحب والحنان. النبض عبارة عن ريتم rhythm (ايقاع سمعى متعاقب لضربات القلب) والريتم يعتبر حساباً تطبيقياً (ودورية للطبيعة وايقاع موسيقى). أى أن أول تعلم للرياضيات يكون مرتبط بالفن (الموسيقى) والدفء العاطفى وقلب الأم.. نبع الحياة.

وقد يدعم أن الرياضيات فطرية وجود منطقة فى مخ الإنسان تختص بنمو

الرياضيات حيث تبين أن الموهوب الكفيف يكوِّن صورة هندسية للعالم لا تختلف عن البصير».

وأود فيما يلى توضيح الافتراضيين (الأول والثاني) لروبين هيرش لتكون الرياضيات إنسانية. وهما الرياضيات بما فيها المعاصرة تتغير مع الزمن؛ والرياضيات دالة للمكان (أى بالنواحى الثقافية والاجتماعية). وبذلك يتعرَّف معلم الرياضيات على دور الرياضيات فى التفاعل مع الحضارات منذ القدم. وعلى دور رياضيات قدماء المصريين والعرب فى نمو الرياضيات بما فيها الرياضيات العصرية.

٣.نبذة سريعة عن دور الرياضيات فى الحضارة المصرية القديمة والعربية فى نمو الرياضيات المتجددة.

مما لاشك فيه أن من ليس له تاريخ ليس له مستقبل. وأن العبقرية الهندسية المعمارية لقدماء المصريين موجودة ودفينة فنيا جميعاً تنتظر لحظة الانطلاق. ويساعد على هذا تحميس المعلم (وتلاميذه) وتشويقه بدور رياضيات قدماء المصريين فى نمو الرياضيات حتى العصرية منها. وقد قلص الغرب هذا الدور إلى كونها رياضيات عملية وأعطوا فضل الرياضيات الشكلية والبرهنة إلى الإغريق. إلا أن الحقيقة أنه لولا رياضيات قدماء المصريين لما كانت رياضيات الإغريق فهى التى أثارتها. ولولا استخدام قدماء المصريين للنسبة الذهبية ∅ فى آثارهم وزخارفهم ومعماريتهم لما أذهل ذلك ليوناردو دافنشى فى عصر النهضة ولما آثارت النسبة الذهبية فكرة الهندسة غير الابدالية العصرية فى نهاية القرن العشرين. كما أن الزخارف والرسوم فى الآثار المصرية ثم المنظور العربى والزخرفة الإسلامية آثارا اختراع الهندسة الاسقاطية فى القرن ١٧ وهندسة التحويلات فى القرن العشرين.

فالرياضيات عند قدماء المصريين بجانب أنها عملية فقد ارتبطت بالعقيدة والفن فهى انسانية وفن عقلى روحى ولها دور فى تجديد الرياضيات. ويتضح ذلك مما يلى:

(١) الرياضيات المصرية القديمة إنسانية بمعنى أنها وليدة حاجة المصرى القديم إلى القياس والاحصاء والتقويم والانشاءات المعمارية والفنية.

(٢) الرياضيات عند قدماء المصريين ارتبطت بالفن الزخرفى والألوان والرسوم والموسيقى والطقوس الدينية حتى كتابة الأعداد كانت عبارة عن أشكال ورسوم. فالرياضيات منذ نشأتها فى مصر القديمة فن عقلى راق تخاطب العقل والروح والوجدان.

(٣) الرياضيات عند قدماء المصريين كانت تفسح المجال للتدبّر والتأمل وإطلاق العنان للتفكير وتصفية الروح والنفس.. وذلك لإرتباطها بالحياة الدنيوية والحياة الأبدية. فمثلا ارتفاع الهرم الأكبر مضروبا فى قوى عشرة معينة يعطى البعد بين الأرض والقمر.

(٤) رياضيات مصر القديمة لها دور فى تجديد الرياضيات عند الاغريق. فقد أثارت رياضيات مصر القديمة المستخدمة فى الانشاءات المعمارية محاولة اثبات صحتها. وقد أدى ذلك إلى مولد الاستدلال والبرهان الرياضى والنظام الهندسى عند الإغريق.

فمثلا طاليس Thales (٦٤٠ ـ ٥٤٦ ق. م) عند وجوده بمصر بهره كمهندس الرياضيات العملية المستخدم فى الانشاءات الهندسية المعمارية المصرية ثم جرد الملامح الرياضية من السياقات الهندسية المبنية عليها ليسأل نفسه لماذا هى صحيحة؟ ودعاه ذلك إلى استخدام الاستدلال المنطقى لإثبات صحتها ثم التوصل إلى عِدّة نظريات منها:

- تنصف الدائرة بأى قطر فيها.
- زاويتى قاعدة مثلث متساوى الساقين متساويتين.
- الزاويتان المتقابلان لمستقيمين متقاطعين متساويين.
- يتطابق المثلث إذا كان لهما زاويتين وضلع مستاويان.
- الزاوية الداخلة فى نصف دائرة هى زاوية قائمة.

أما فيثاغورث (٥٦٩ ـ ٤٧٥ ق. م) فقد أثارت زايارته لطاليس فى شبابه إثبات

نظريته المعـروفة باسمه للتحقق مـن صحة طريقة قدماء المصريـين فى قياس زاوية قائمة من مثلـث من الحبال أطوال أضلاعه ٣، ٤، ٥ لتعميمهـا. كما أثارت هندسة قدماء المصريين عن طريق طاليس ليثبت فيثاغورث نظرية:

- مجموع زوايا المثلث تساوى زاويتين قائمتين.

ولربما كانت لـفلسفة فيثاغورث المـعروفة بالأخوة brotherhood جـذور تمتـد للطقوس الدينية لقدماء المصريين لـها صلة بطبيعة شبه الدينية quasi religous nature ومن أساسيتها(٦):

- عند أعمق مستوى، الحقيقة هى رياضية فى الطبيعة nature.
- يمكن استخدام الفلسفة لتطهير النفس Spiritual Purification.
- يمكن أن تصعد الروح لتتحد مع السماء divine.
- بعض الرموز لها دلالة mystical.
- كل الأخوة فى نظامه يجب أن يتمسكوا بالولاء والسرية.

وبالتالـى فقد ساعدت نظـريات طاليس وفيـثاغورث الرياضى اقـليدس (٣٣٠ - ٢٧١ ق . م). على عمل الهنـدسة الاقليدية (كأول نظام شكلى مبنـى على المسلمات ويستـخـدم البـرهان المنـطقـى) عندمـا كان فـى أحضـان مصر كـأول رئيـس لقـسم الرياضيات لجامعة الإسكندرية ومكتبتـها. ولم يقف دور رياضيات مصر القديمة على نمو ريـاضيات الإغـريق ولكن أثـارت وما زالت تـثير نمـو الرياضيـات فى العـصور المختلفة حتى عصرنا هذا.

ففى القرن الخـامس عشر أوصلت النسبـة الذهبية ($\varnothing = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ١,٦) العـالـم والرياضى الفنان ليوناردوا دافنشى التى وجدها مستخدمه فى النقوش المصرية القديمة (والزخارف العـربية)، لأعماله فـى الهندسة كتـلك الخاصة بالتـقسيمات الهـندسية الديناميـكية. ومن المشوق أن نعرف أنه قـد يكون تأثره بالحضارة المصـرية والإسلامية

أدى إلى أنه كان يكتب من اليمين إلى اليسار وليس من اليسار إلى اليمين كما هو معتاد فى الغرب.

هذه النسبة الذهبية (التى استخدمها قدماء المصريين والعرب فى أعمالهم الفنية والزخرفية...) والمعمارية مع فكرة التبليط، tiling فى الزخارف الإسلامية أثارت تفكير العديد من الرياضيين ومنهم كورنز Cornes فى اختراع هندسة عصرية. (للمزيد انظر الباب الثالث الفصل السابع).

هذا بالإضافة إلى أن الرجوع إلى الرياضيات العملية لقدماء المصريين ربما أثار الفكر الرياضى الفلسفى للعمليين والتطبيقيين، ونصف العمليين أصحاب الرياضيات العصرية.

٤. استفادة المعلم من تحديد موقفه من طبيعة الرياضيات

قدمنا فيما سبق بعض أفكار الرياضيين حول طبيعة الرياضيات ومدارسهم الفكرية: الشكليون ـ البحتويون (المثاليون ـ الأفلاطنيون) ـ الحدسيون ـ المنطقيون ـ العمليون ـ التطبيقون ـ العمليون ـ نصف العمليون. وبالرغم من الاختلافات فيما بينهم إلا أنه بلا شك يوجد توافق Compatibility بينهم. فالشكليون يريدون أن يقولوا لنا ماهية الرياضيات What، والبحتويون يريدون أن يقولوا لنا متى تكون صحيحة؟، والحدسيون يريدون أن يقولوا لنا متى تكون جيدة؟، والمنطقيون يريدون أن يقولوا لنا من أين تأتى؟ والعمليون يريدون أن يقولوا كيف نعملها مثل علماء العلوم؟، والتطبيقيون يريدون أن يقولوا ما فائدتها؟، ونصف العمليين يريدون أن يقولوا ما معنى أن نقوم بعملها؟. وقد قدم نصف العمليين فكرة أن الرياضيات متغيرة وإنسانية واجتماعية وسياسية.. وتصحح أخطائها.

وعلى ذلك من المهم أن يحاول المعلم استرجاع خبراته فى تعلم وتعليم الرياضيات ليكوِّن منظوره الخاص حول طبيعة الرياضيات (أو ما هى الرياضيات من وجهة نظره)؟ فى ضوء مدارس الفكر الرياضى. لأن ذلك يساعده على تحديد

توجهاتـه عند تدريسه بتـحمسه وتقديـره لأحد أو بعض أو كل وجهات الـنظر حول طبيعـة الرياضيات. كما يسـاعده فى وضع أهدافه لتـحقيق حاجات التلامـيذ وذاتهم على اختلاف فروقهم الفردية. فقد يكون منـهم من ينتمى إلى الشكليين أو الحدسيين أو البحتـويين أو المنطقيـين أو العمليين أو نـصف العمليـين؛ ولمعرفة المعلـم فكر هذه الأنواع (من المـدارس الفكرية) فـإنه يستـطيع أن يساعـد التلاميذ عـلى تحقيـق ذاتهم ليصل كل منهم إلى أقصى ما تمكنه قدراته فى تعلم الرياضيات والابتكار فيها.

فتحديد«لمـاذا يتعلم التلاميذ الريـاضيات»؟ كسؤال فلسفى يـحدد الأهداف التى تؤدى إلى تحـديد ما هو المحتوى الـرياضى ثم إلى كـيف يتعلـم التلاميذ الريـاضيات **(مثل الرياضيون فى أى أو معظم المدارس الفكرية السابقة)**، ثم إلى الطريقة الـتى يتبعها (لتكون الرياضيات مناسبة وذات تعنى) ثم إلى تحديد المصادر والأنشطة التعليمية ثم الأساليب التقويمية... مع مراعاة الفروق الفردية للتلاميذ.

أى أن هذا كله مبنى علـى وجهة نظر المعلم الذى يتبناها حول طـبيعة الرياضيات علـى أساس المدارس الفـكرية (الـفلسفـية) المذكورة. وذلـك بما ينـاسب موقفـه من الرياضيات وبما يناسب معناها عند التلاميذ باختلاف نظرتهم إلى الرياضيات.

وعمومـاً نمو المعلـم المهنى يـكون مستـمراً. ومن المسـتحب أن يسـتمر فى بـلورة وتجديد انـعكاساتـه حول طبيعـة الرياضيـات وحول تدريسه لـلرياضيـات من خلال خبـراته التـدريسية ومـحاولة الـتجديـد فيهـا عن طريـق دراساته وقراءاتـه المسـتمرة وتسجيل مذكراته وخواطره وانعكاساته.

تـعقـيـب(١): تـضامين implications وإنعكاسات حول تنمية الابتكار التدريسى لمعلم الرياضيات

حاولت فـى هذا الفصـل من خلال عرض مدارس الـفكر الريـاضى التى تـشمل الرياضـيات الإنسانيـة لمدرسة نصف الـعمليين والتـى ينصب إهتـمامها علـى ما هى الرياضيات الـعصرية ومنها هندسة الـفركتال، إثارة الجانب الابتكـارى فى تدريسك

للرياضيات. فقد نوهت إلى أنه بالفطرة كل منا لديه الموهبة فى الرياضيات والفن منذ البداية فى رحم الأم. وحاولت انتقاء مقولات الرياضـيين (البحتويين مثلا) التى تُشَبِّه أنماط الرياضيـات بأنماط الفنان والموسيقـى والأديب الشاعر وتشبه أفكـار الرياضيات بالألوان المتناسقة فى هـرمونية.... وأيضـا مقولات الرياضـيين العصريين (النصف عمليين) الـتى تُشبه الرياضيات بالـهواء النقى الذى يدخل الرئـة. وكذلك من خلال حديثـى عن هندسة الفـراكتال التى تمس الـعقل والقلـب والوجدان. وتمتلك ذاتـيا ما يعكس الابتكار الرياضى المعاصر.

وقد اعتبرت الـرياضيات فنا عقلياً راقـياً، وبذلك فالرياضيات هى ابـتكار وأيضا إبداع. حيث لا أفرق بين ابتـكار الرياضيات وأبداعها. وبالتالـى لا أفرق بين الإبتكار التدريسى والابداع التدريسى. فكلاهما إختراع فنى.

ولما كان كل منا مبتكر (فى الرياضيات والـفن) بمستوى معين (منذ بداية التكوين) فيمكن تنمية هذا المستوى.

فأنا أعتقد «أنا مبتكـر (أو مبدع) فأنا أعيش» وأيضا «أنا أعيش فأنا مبتكر» ـ عوضاً من مقولات سارتر وديكارت (أنا أفكر فأنا أعيش) (وأنا أعيش فأنا أفكر).

والواقع أن الكائنات الأخرى تبتكر لتعيش. فمثلا أحد أصناف الطيور تبنى عشها بعمل نفق مائـل إلى أعلى داخل جذع شجرة ويكون العش فـى أعلاه حتى لا تغرقه الأمطار (إذا كان فى المكان العكسى إلى أسفـل).والعصفور يهجر عشه لمكان آمن إذا لاحظ أن عدد البيض فى عشه ينقص..... حتي الكائنات الأولية كالفيروسات، تتغير وتبدل من نفسها حتى لا تفنى بالمضادات الحيوية مثلا....

فالتغير سمة الحياة يتطلب الإبتكار (والإبداع) فى التعامل معها ولو حتى فى إطار نمط معين. فـدودة القز أعتبرها مـثالاً لإنتاج عمل إنشـائى هندسى مميز فـطرى. فهى تأكل ورق أخـضر وتهضمـه وتنتج منـه الحرير... لتـصمم وتنتـج الشرنقة... بـصبر وعناية. وكل دودة تقابـلها مشكلات تختلف عن الأخرى تخـص المكان الذى تعمل فيه مثلا... فهى تحاول مرات ومرات فى تجارب إبـتدائية تحديد أنسب موقع آمن قوى

وتغير من حركاتها وإجـراءاتها حتى تختفى داخل الشرنقة تبعـا للظروف بمستويات ابتكارية.

فما بالك أنت كمعـلم رياضيات.. أمامك تلاميذ بفروق فردية تـتباين مستويات قدراتهم وتحصيلهم وأسالـيب تعلمهم واهتماماتهم وميولهم وصحـتهم.. كما تتباين الفصول وتـختلف الظروف... فـلا يوجد حصة مثل حـصة (حتى ولو كانـت لنفس الدرس)..... كما تختلف الموضوعات الدراسية الرياضية... أليس هذا أدعى لك أن تغير وتجدد من تدريسك لمجابهة هذه التغيرات التدريسية لتعيش كمعلم ناجح يستمر فى النجاح من خلال مواجهاته الإبتكارية غير الـتقليدية للتحديات التى تقابله؟! ولا ننسى أن الوصول إلى تحقيق الذات Self actualization بالتفرد والإبتكار هى حاجة وضعها مـاسلو Maslow فى قمة الحاجـات الإنسانية التى تبدأ بالحـاجات الأساسية (البـيولوجـية الحـاجات إلى الأمـن والأمان) ثم الحـاجات النـفسـية (الحاجـات إلى الانتماء والحاجات إلى الحب، والحاجات إلى التحصيل والانجاز وكسب الاستحسان والتقدير).

واشباع الحاجات فى المستويات الأقل هو الذى يسهل تحرير العقل لينطلق ويعمل بكفاءاته الـقصوى حيث يصل الفرد إلـى السعادة والرضاء الذاتى مـن الأعمال التى يقـوم بها العـقل الإنسانـى من ابتكـار وتجديد وتحمـل مسؤوليـة تعلم الـفرد بنفـسه ومراقبتها فى السر والعلن.

وتنـطلق الأعـمال الابـتكاريـة الأصليـة من لحـظات التـعمق والـتركـيز والتـدبر والتحدى والخشوع والإحـساس بالرضا والسعادة من الداخل فـى عمل فريد خاص فلماذا لا تصل إلى هذا المستوى لتحقق تفردك ولـتنبع السعادة من داخلك لتسعد بها الغير. والآن إقرأ هذا الفـصل مرّة أخرى بتركيز وتعمق ليس فـقط بهدف أن تتعرف على أحد أو بعض أو كل المدارس الفكرية فى الرياضـيات التى تنتمى إليها أو ينتمى تلاميذك إليها وأهميتها فى التدريس، ولكن لتتحسس الأجزاء التى أثارت أحساسك وتفكيرك وخيالك وحـفزتك على استرجاع أو تكوين نتيجـة ما. ثم حاول أن تكتب مذكرات عنها، ومستنيراً بما قرأت نفذ الآتى:

- إسترجع موقفاً جعلك تسعد وتحب الرياضيات.

- استرجع موقفاً جعلك تبتكر (تغير وتجدد) فى تدريسك لمحتوى من الرياضيات (مفهوم - قاعدة نظرية - تمرين ....).

- استرجع موقفاً جعلك تحفز تلميذ أو أكثر لحب الرياضيات.

- استرجع موقفاً جعلك تحفز تلميذاً أو أكثر للتوصل إلى طريقة جديدة فى حل مسألة (مشكلة) رياضية أو التوصل إلى عمل رياضى.

- استرجع موقفاً تغلبت فيه على ملل التلاميذ من المعالجة الشكلية (المجردة) للرياضيات.

- استرجع موقفاً إستخدمت فيه روابط Connections فى الحياة والطبيعة والمواد الأخرى استمتع بها تلاميذك.

- استرجع رياضيات جميلة وأخرى قبيحة وأخرى مناسبة (لائقة) وأخرى إنسانية قابلتها فى دراستك أو تدريسك.

- استرجع مرّة وجدت فيها نفسك عالماً يكتشف معلومه رياضية بالطريقة العلمية، وهل حاولت استخدام الطريقة العلمية فى تدريسك؟

من خلال الإجابة على هذه الأسئلة وأسئلة أخرى تضعها من وحى قراءتك لهذا الفصل ستجد مقدراتك الابتكارية تتفتح وتنمو... وتعكسها تلقائيا فى تدريسك.

المراجع

١ ـ أ. د/ نظلة حسن أحمد خضر (٢٠٠٢): «أصول تدريس الرياضيات» القاهرة. عالم الكتب ط(١٠).

٢ ـ أ. د. نظلة حسن أحمد خضر (٢٠٠٢): «نم مواهبك الفنية والرياضية من خلال الحلزون مع روابطه وحكايات عليه». القاهرة الهيئة المصرية العامة للكتاب ـ ضمن مجموعة للصغير والكبير من سن ١٢ سنة فأكثر.

3- Hersh, Rubin(2002): "What is Mathematics Really?
reviewed by Cohen, M.
The Mathematical Intelligencer Vol 22 No 1 Winter 2000 U.S.A Springel - Verlag.

4 - Henle, J.M (1991): "The Happy Formalist". Op - Cit, Vol. B Nol Winter 1991.

5 - Khedre, Nazla. H.A (2002): "On Humanizing Malhemalics" Proceedligs of The International Conhference, "The Humanistic Renaissance: "Mathematics Education" - The Math. educ. into The 21 st Century Project. Palermo - Italy, Sept 2002.

6 - Thomas, D.A (2002): "Modern Geometry" U.SA. Books/ Cole.

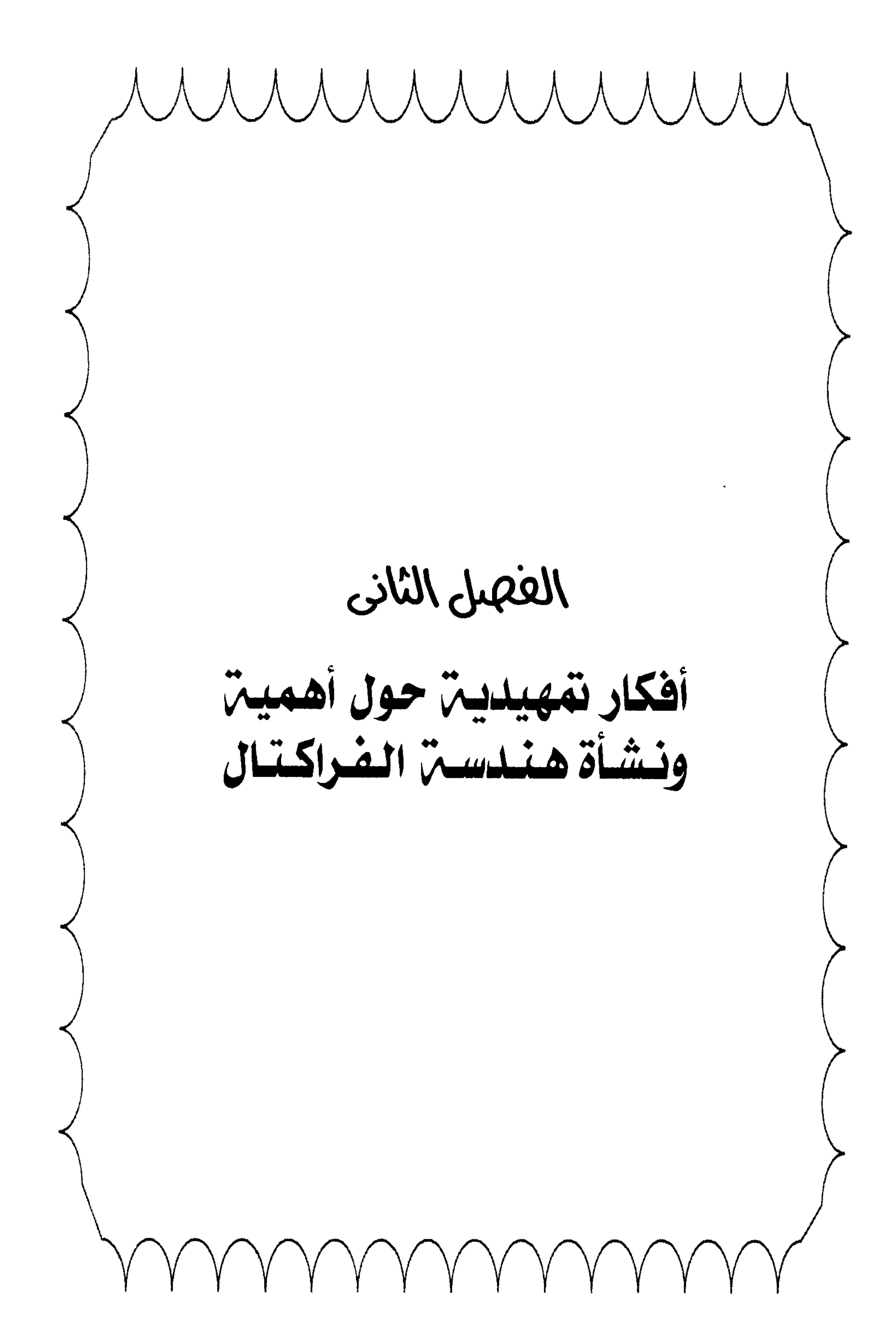
7 - Wilde, S etal (ed) (1999): "Learning to Teach Mathematics in the Secondary School". London Routledge.

8 - mathfrum. edu/~wood ard/ mquot. html



الباب الثانى

تقديم هندسة الفراكتال



الفصل الثانى

أفكار تمهيدية حول أهمية ونشأة هندسة الفراكتال

الفصل الثانى

أفكار تمهيدية حول أهمية ونشأة هندسة الفراكتال

مقدمة:

عندما ترتبط الرياضيات بالطبيعة nature البديعة فإنها تصبح مألوفة واقعية قريبة من تفكير المتعلم يستشعر جمالها فى عقله وفى الطبيعة حوله. وعندما ترتبط الرياضيات بالفن فهذا يزيد دراستها متعة ويجعلها قريبة من وجدانه وإحساسه يستشعر جمالها فى قلبه وروحه. وعندما ترتبط الرياضيات بالعلوم الأخرى، وتسهم فى اختراع ونمو نظريات جديدة، وتطبيقات واسعة وتقدم حلولاً لمشكلات حيوية عصرية كانت تعتبر مشكلات أزلية فهذا يجعل المتعلم يقدرها لفائدتها ويستشعر جمالها فى عظمتها.

تناغم الرياضيات مع الطبيعة مع الفن الراقى الذى يولّد نظريات وتطبيقات فى أرجاء الحياة المعاصرة نجد مثالاً له فى هندسة عصرية تسمى هندسة الفراكتال Fractal Geometry. وكان هذا السبب الأول فى تعلقى بها وتقديم فكرة مبسطة متكاملة لها للمعلم (فى هذا الكتاب) للاستفادة بها وليستطيع أن ينمى تذوق جمالها فى الكون وفي العقل والقلب وتقدير عظمتها وفائدتها لتلاميذه من خلال خصائص مثيرة لها وأنشطة مستوحاه منها. أما السبب الثانى الذى أثارنى لتقديم هذه الهندسة كان نتيجة حديث مع إحدى طالباتى (وهى الآن فى درجة أستاذ ولها مؤلفات وهى أ.د/ مديحة حسن). وذلك عندما كنا فى الطريق لحضور مؤتمر فى كلية تربية الفيوم وأرادت الاستفسار عن بعض أفكار هذه الهندسة التى قرأت عنها. وسألتنى لماذا لا أكتب نبذة عنها. وبعد سنتين انشغلت باستكمال كتاباتى سلاسل للصغير والكبير لتنمية العقلية الرياضية الابتكارية منذ الصغر تتضمن سحر وغرائب هندسة جديدة (مستوحاه من نظرية فى التوبولوجى الجبرى) ثم حضرت مؤتمر الجمعية المصرية

للتوپولوچى حيث ألقيت ورقة عن «التوپولوچى ومعلم الرياضيات[١] تضمنت فكرة سريعة عن هذه الهندسة وأحسست بتشوق البعض للتعرف على هذه الهندسة.

واسترجعت بعضاً من كتاباتى للطفل (أو بالأحرى للصغير والكبير)[٢]، ووجدتنى المحت ببعض خصائص لأشكال فراكتال، اعتبرت أحدها بطلَ لإحدى سلسلة حكايات وألغاز رياضية. كما قدمت التكرار المرحلي iteration فى تكاثر ثنائى لمخلوقات عجيبة فى كتاب لرياض الأطفال[٤]، وفى كتاب آخر لتنمية المواهب الرياضية والفنية من خلال الحلزون[٣]. وأشرت إلى خاصية البعد الفراكتالى فى أحد سلاسل كتبى عن تشكيلات للمكعب. وكان هذا سببا ثالثا دفعنى لاستكمال ما قدمته فى عمل متكامل للمعلم عن هذه الهندسة.

أما السبب الرابع فكان تأثرى بأصالة فنان يدعى پولاك، وفنان وعالم آخر يدعى تيلر حاول تحليل لوحات پولاك باستخدام الكمبيوتر، فوجدوها دون غيرها المشابهة لها تتضمن أشكال فراكتال. كما استطاع تيلر نفسه أن يجعل الطبيعة فى ليل ذو رياح عاصفة أن تتدخل فى قذف ألوان من جهاز له بريتم (ايقاع) حركة الرياح على لوحة فنية فى وضع أفقى فترسم لوحة بأشكال فراكتال تشبه لوحات پولاك.

أما السبب الخامس فكان صدور كتاب مترجم لوزارة الثقافة عن علم جديد انبثق من هندسة الفراكتال وهو الهيولية (أو جوازاً الفوضى، Chaos، بعنوان «الهيولية تصنع علماً جديداً» يتضمن فصلاً فى بضع صفحات بعنوان هندسة الطبيعة. ويقصد بها هندسة الفراكتال والكتاب مكتوب للعامة بأسلوب وصفى وتثقيفى بعيداً عن أى معالجة رياضية.

وعندما فكرت فى الكتابة عن أفكار هندسة الفراكتال رجعت إلى الإنترنت (من خلال Internet Exlolorer ثم اختيار Favourates ثم كتابة Fractal Geometry) فوجدت ١٨٠٠ موقعاً يتعرض لهذه الهندسة متضمناً حوالى ٧٠٠ كتاب استمتعت بثلاثة مواقع منها ما يخص الفن والصور المتحركة مثل:

www.angelfire

www.contest2k.com

www.math.rice.edu

وعلى ذلك حاولت من خلال التمهيد وتقديم الأفكار الأساسية لهندسة الفراكتال **فى هذا الباب** أن أطعمها ببعض أعمالى السابقة والاستعانة بأعمال وفنون الآخرين لغرس النواحى الفنية الرياضية المثيرة الخلاقة العصرية من جهة، ومن جهة أخرى إثارة المعلم للتعلم مدى الحياة فى الرياضيات وخاصة الرياضيات العصرية ومنها هندسة الفراكتال. وذلك مع إثارة النواحى الابتكارية فى تدريسه.

١.٢ هندسة الفراكتال وأفكار وحكايات حول نشأتها

جلس بنوا ماندلبروت Benoit Mandelbrot (البولندى المنشأ والفرنسى الموطن والمشتغل حاليا فى شركة IBM بأمريكا) على شاطىء بإنجلترا ومن قمة استمتاعه بالبحر وأمواجه وجوه... زاغ ببصره نحو الشاطىء وبهره تعرجاته وخلجانه وتضاريسه الصخرية المتباينة... لم يلهمه البحر بقصيدة شعرية أو بلوحة فنية...

ولكن الشاطىء المتعرج أثار مشكلة فى خاطرة.. ما هو طول شاطىء إنجلترا؟ شكل الشاطئ المتعرج ذكره بالأشكال المتشابهة ذاتيا self similarity . والشكل المتشابه ذاتيا ببساطة هو شكل يتكون من أشكال أصغر منه بمقاييس Scales مختلفة مثل فرع شجرة وتفرعاتها أو شريان وتفرعاته أو نهر بروافده الموجودة فى الطبيعة nature، وفى الزخارف الرياضية الفنية منذ آلاف السنين (ومنها المصرية القديمة والإسلامية)... ولكونه عالم رياضى تدرب على الرياضيات الشكلية لمدرسة بورباكى، فكان من ثقافته الرياضية أن تذكر اهتمامات كانتور وهاوسدورف وچوليا وكوخ Koch، وبينو..... خاصة بأفكار وأشكال قدموها ولاحظ أنها تتضمن أشياء ذات تشابه ذاتى لأى عدد من المقاييس.

وانطلق من تعريف الشكل المتشابه ذاتيا (وهو المتكون من نماذج أصغر منه) إلى تعريف أعم للفراكتال.. وهو الشكل الهندسى (الخشن أو ذو الانكسارات) الذى يمكن تقسيمه إلى أجزاء كل منها (على الأقل تقريبا) هو تصغير للشكل لعديد من

المقاييس)... ورجع إلى تعاريج الشاطىء... انها فراكتالات. ويبدأ مشوار المعالجات الرياضية ليخترع أبعادًا جديدة للفراكتالات؛ منبثقة من البعد التوپولوچى وبُعد قدمه هاوسدورف (بُعد الصندق). وأعتبر بُعد dimension الفراكتال خاصية أساسية أخرى للفراكتال.

ثم يقوم بتوليد فراكتالات (فى الرياضيات) وفراكتالات (مشابهة لما فى الطبيعة) فرضية Virtual؛ عن طريق نظم الدوا ل مرحلية التكرار IFS، حيث يمكن اعتبار التكرار المرحلى تكنيك مرتبط بالفراكتالات.

وقد شد انتباهه واعجابه وانبهاره بمجموعة چوليا Jolya Set إلى دراسة إتصالية مسارات (كمفهوم توپولوچى) لدوال ذات متغير مركب تربيعية دفعه إلى توليد أجمل وأغرب وأشهر فراكتال معروف باسمه وهو مجموعة ماندلبروت Mandelbrot (كجاذب غريب Strapge attractor). ومع عمله فى شركة IBM ونتيجة التقدم فى الرسوم الكمبيوترية وتقنيات التلوين، أمكنه عمل برنامج كمبيوترى لاظهار مجموعة ماندلبروت على شاشة الكمبيوتر. وهى بالألوان تعتبر لوحة فنية فريدة تتميز بشفافية درجات الألوان المتعددة. وقد ساعده عمله السابق فى الاقتصاد ومقابلته للاضطرابات الاقتصادية، ومن عمله فى هندسة الاتصالات ومقابلته لمشكلات الاتصال التى فى باطنها أسباب ترجع إلى الهيولية Chaos التى يرتبط فيها النظام باللانظام. فالهيلوليه ارتبطت نشأتها بهندسة الفراكتال التى أدت إلى تنميتها وبلورتها.

نرجع إلى الطبيعة الساحرة الملهمة.... البحر وشواطئه المتعرجة جعلت ماندلبورت يخترع هندسة جديدة عصرية، أحد تطبيقاتها هو مشكلة قياس طول الساحل الإنجليزى. وذلك بتحليل خواص التشابه الذاتى والبعد الفراكتال وتمثيل فراكتالات تعكس ثنايات وانكسارات وتعرجات الشاطىء العديمه الانتظام لأجزائه الصغيرة.

هندسة الفراكتالات لها أيضا تطبيقات فى هندسة الاتصالات وفى علوم الأرصاد

الجوية.... فهى فى الواقع لها تطبيقات حيوية تكنولوجية متعددة. وتستخدم فى العلوم Sciences والعلوم الهندسية مثل توصيف شكل نسيج لأسطح مركبة. وعلى جانب آخر تستخدم فى السينما والتليفزيون لعمل مناظر طبيعية فرضية خيالية Creates realisic imaginary landscape كخلفية لأفلام الخيال العلمى والقصص الخيالية.

كما تطبق هندسة الفراكتال فى الأنظمة الديناميكية والموجيات Wavelets وأنظمة الهيوليه Chaos وفى علوم الزلازل والفيزياء الأرضية والأحياء. ونتج من ربط (أو تطبيق) هندسة الفراكتال مع نظرية الأنظمة الديناميكية التوصل إلى علم عصرى جديد يسمى «الأنظمة الديناميكية غير الخطية» non linear dynamic Systems . وقد يسميها البعض «بأنظمة التعقد» أو «التعقدات» Complexities .

وعند إصدار كتاب ماندلبروت ١٩٨٢ حول هذه الهندسة اختار اسمها هندسة الفراكتل، وقد اختار اسم فراكتال Fractal لأنه وقع تحت يده بالصدفة مجلة عرف منها أن Fractus هى كلمة لاتينية تعنى يكسر break وبمعنى كسر Fraction رياضى وهذا جعله يشتق الاسم فراكتال منها. ولذا فإن البعض يترجمون هندسة الفراكتال بهندسة الكسريات أو هندسة الفتافيت.

تمضى الأيام ويذهب بعض الرياضيين (٦) لمؤتمر رياضيات «**المجلس العالمى لمحللى غير الخطية**» سنة ١٩٩٦ باليونان. وللترويح يذهبون إلى متحف فيجدوا أنفسهم أمام لوحة من العصور القديمة لشاطىءيونانى قديم للقارة المفقودة أتلانتيس أحدثت تعرجاته بركانًا يعتبر نموذج لفراكتالات شبيهة بشاطىء إنجلترا. فيستعيدوا الذكريات، وينطلق الجميع يسأل ما هو طول شاطىء أتلانتيس؟.. أسوة بسؤال ماندلبروت... ما هو طول شاطىء إنجلترا؟....

مجمل القول: التأمل فى الطبيعة.. الأمواج فى حركاتها المنتظمة والفوضوية (الهيلوليه) Chaos .. الشاطىء بتعرجاته غير المنتظمة والمتشابهة،.. الثقافة الرياضية من القديم والحديث التى اخترعها الرياضيون فى العصور المختلفة..، التعمق

الرياضى فى التوپولچى والتحليل المركب ونظرية الدوال الهندسية والحركة البراونيه Brownaian وتكامل ليبيه وتماثلات كلين، لى Lie... أنتج هندسة جديدة عصرية مملوءة بالحياة والجمال تعكس الطبيعة وتسهم فى تفسيرها وفى حل المشاكل العصرية... نموذجها يحتضن الفن الرياضى القديم والحديث... ولها تطبيقات حيوية فى الأنظمة الديناميكية والتكنولوچية والحيوية والطبيعة.... كل هذا يعكس وجهة نظر هيرش حول الرياضيات الإنسانية... فهى من صنع الإنسان، اجتماعية (من صنع مجموعة الرياضيين)...، متغيرة، سياسية تعكس النمو الحضارى تؤثر وتتأثر به....، وهى دائما تصحح نفسها أو تطور نفسها. فكما يقول ماندلبروت(٧) «لماذا توصف الهندسة (ويقصد الهندسة الاقليدية) دائما بأنها جافة وباردة؟ ... يكمن السبب فى عدم قدرتها على وصف شكل السحاب أو الجبال أو الشاطىء أو الشجرة.. فالسحب ليست أشكال كرويه والشواطىء ليست دوائر وجذع الشجرة bark غير ناعم، ولا البرق يسير فى خط مستقيم.. وجود هذه الأنماط تتحدانا لدراسة هذه الصور (الأشكال) Forms التى اعتبرها إقليدس بأن ليس لها شكل Formless ، ودراسة الشكل الخارجى morphology لما لا شكل له amorphous».

وبالرغم من أن ماندلبروت، هو منشىء هندسة الفراكتال الهامة التى تعتبر حجر أساس لتطور علوم عصرية وحلولاً لمشكلات عصرية إلا أنه تعرض لنقد وهجوم من الرياضيين. فقد إنتقده كرانتز(٥) Krantz لأن معظم أفكار هندسة الفراكتال كانت موجودة من قبل كما أن بعض نظرياتها أثبتت فى ١٩٢٠.

ومع أن ماندلبروت إعترف، أن أفكار پول ليفى الشاعر الرياضى لنظرية الحركة **البراونيه** لها الفضل فى إلهامه بأفكار رائعة (جميلة) حدسيه فى عمل الفراكتال؛ إلا أن سبب النقد يرجع ربما إلى أن هندسته لا ترضى (البحتويون ـ المثاليون ـ الشكليون ـ المنطقيون). وذلك لأن لها مذاقًا ينحو إلى الرياضيات التطبيقية فهى نصف عملية، ولأنها تخدم العلوم الأخرى أكثر من الرياضيات. أو لأنه يعتمد على إمكانيات وآليات الكمبيوتر لاستكشاف وتفسير نظرياته دون إثباتها بأساليب رياضية صارمة. أو ربما يكون السبب راجعًا إلى تعالى ماندلبروت وإحاطته بهالة إعلامية فى حلبة

السياسية العلمية حتى إعتبروه أنه خارج الرياضيات. وعلى أية حال فإلى ماندلبروت يرجع الفضل فى وجود هندسة الفراكتال.

وكما أثار البحر والشاطىء الإنجليزى الهامة بهذه الهندسة، فقد أثار البحر بإنتظام وثورة موجاته الرياضى سمال Smale إلى اختراع هندسية عصرية أخرى تعتمد أيضا على الهيولية Chaos تسمى هندسة حدوة الحصان. ولها جذور فى هندسة الفراكتال.

وسيظل البحر منبعاً الهام خصب لبلورة أفكار ونظريات رياضية وعلمية. ومهما كان لهندسة الفراكتال من إبهار لأهميتها وجمالياتها وحيوتها وفائدتها العصرية.. فانها ستصير بعد فترة (قد تمتد قرنًا من الزمان مثلا) عتيقة وغير مناسبة لتفسير ظواهر طبيعية أو حياتية أو حل مشكلات مستقبلة. فقد كانت قوانين نيوتن فى وقت ما مناسبة لتفسير حركة الأجسام الكبيرة وحركة البندول... ولكنها أصبحت عتيقة لفشلها فى تفسير حركة الأجسام الدقيقة وظواهر عشوائيه وفى البحث عن أصل الكون فجاءت النظرية النسبية لأينشتين لتتربع على العرش. و نجحت فيما فشلت فيه قوانين نيوتن ثم أصبحت عتيقة لعدم قدرتها على تفسير اضطرابات وعدم الخطيّة فى أنظمة حيوية... ثم جاءت هندسة الفراكتال ونظرية الهيولية ونظرية الأنظمة الديناميكية غير الخطية لتحل مشكلات عصرية ترتبط بالاضطرابات والهيولية (الفوضى)... فى مجالات متعددة فى الطبيعة والإنسان وهندسة الاتصالات وفى الأجهزة الدقيقة التكنولوجية... ثم بعد فترة ستصير عتيقة... وهكذا وتبقى الرياضيات ذات طاقة متجددة تبعث الحياة والنمو فى علوم مستقبلة متجددة.

وأخيراً هندسة الفراكتال قدمها ماندلبروت فى السبعينيات وبلورها فى الثمانينات وإهتم بها العلماء واشتهرت فى التسعينات. وابتدأ الإهتمام بتعريفها للمعلم منذ سنتين فى ٢٠٠٢. فلماذا لا أبادر بتقديمها لمعلم الرياضيات فى مصر والبلاد العربية؟

تعقيب(٢): تضامين implications وانعكاسات حول تنمية الإبتكار التدريسى لمعلم الرياضيات

فى الواقع أن الحكاية لها تأثير كبير على جذب الإنتباه والاهتمام والتعلق..،

وعلى إثـارة التفكير والخـيال والمشاعر...، وعـلى تقمص شـخصية البطـل والاقتداء به...، وعلى الانغـماس ومتابعة الأحداث المتسلـسلة أو القفز للتوصل لـلنهاية...... وكلنا نعرف كمية الأهداف التى تحققها الحكاية خاصة إذا كانت تربوية هادفة.

وقد ناظر أحـد الرياضيين الحكايـة بالبرهان المنطقـى فكلاهما يبدأ مـن مقدمة أو مسلمـات (أو نظريات يعتـمد عليها البـرهان)، وكلاهما يسـير فى خطوات متـعاقبة (سلـسلة مـن الأحداث أو خطـوات منطـقيـة)، وكلاهمـا يستـخدم علاقـات (بين الأحداث والأبطال والأماكن أو قواعـد منطقية ونظريات)، وكلاهما لـه نهاية (نهاية الحكاية أو وهو المـطلوب إثباته). كما أن أحد الريـاضيين ناظر إيقاع البرهـان بتناسق خطواته وجماله بإيقاع الموسيقى..

وقد وجدت بـالتجربة أن الحكـايات والألغاز الريـاضية تنمـى التفكير الـرياضى الابتكـارى (بمستويـات عليا) لـلتلمـيذ الضعـيف والتلـميذ المتـفوق فى الريـاضيات (بالمرحلة الإعدادية).

فما بالك بحكاية نشأة هندسة عصرية مع تمهيد يثير الدوافع لمعرفتها. أعتقدأن هذا المدخل سيكون له دور فى تـنمية ابتكارية تدريس معلم الريـاضيات خاصة إذا كانت هذه الهندسة العصرية إبتكاراً لفكر رياضـى جديد، وهى بذاتها تمتلك خصائص تثير الإبتـكار نظـراً لروابطـها Connections بالطبـيعة وبالفن وبـالرياضيات وبالـعلوم وبالتطبيقات العصرية التكنولوجية والحيوية.

بالاضافـة إلى أن الحكايـة عندما تكـون مرتبطـة بنشأة علـم جديد أو حتـى عمل تاريخى عظيم تعبّر عن فكر جديد مختلف عن نمط تفكير تقليدى.

ويذكرنى هـذا بحكاية مولد العـبقرية الحربية لـلإسكندر الأكبر. فعنـدما كان فى الثـالثـة عشر مـن عمـره إشترك فـى مسابـقة... وهـى ركـوب حصـان غيـر مروض والانطلاق به والحصان يكون جائزة لمن ينجـح فى المسابقة... كل من يركـب الحصان أمامه يجد أن الحصان يثور ثورة عارمة ويرميه. لاحظ الإسكندر مكان الحصان. فغير مـوضـعـه ١٨٠° حتى لا تقع عـينا الحصان على أشعـة الشمس التى تحرقهـا وتؤلمها

وتهيجه. أى أنه غير تفكيره تماماً عن غيره السابقين الذين فشلوا فى ركوبه. ومن المشوق أنه ارتبط عقليا ووجدانيا بهذا الحصان الذى ركبه فى جميع فتوحاته وعندما عاد به بعد مرض الجنود فى آسيا ابتدأت صحة الحصان فى الذبول حتى مات. ومن شدَّة ارتباط الاسكندر به توفى هو بعده بشهر واحد.

بالتأكيد مثل هذه الحكاية لها مزايا تمس الإحساس والوجدان والخيال والتفكير وتقوى الذاكرة.... وتعتبر أفضل من السرد التاريخى بمميزاته.

والآن بعد قراءتك لهذا الفصل مرَّة أخرى حاول أن تتبين فاعلية مدخل الحكاية حول نشأة هندسة الفراكتال فى تنمية تفكيك ومشاعرك وخيالك وذكرياتك لمواقف رياضية وفى تشويقك وتحفيزك لمعرفتها ثم اكتب انعكاساتك فى مذكراتك. ثم حاول التعليق على ما يأتى:

- أثر حكاية نشأة هندسة الفراكتال على تعلقك بعمل البطل ماندلبروت.
- أثر الحكاية مندمجة مع بعض الأفكار الرياضية لهندسة الفراكتال فى تنمية حب الاستطلاع لتعلمها.
- أثر الحكاية بعد التمهيد لأهميتها فى تنمية تذوقك لجمال الرياضيات وتقدير فائدتها.
- هل حفزك هذا المدخل باستخدام حكاية نشأة هندسة الفراكتال على استقلالية التعلم فقمت بزيارة بعض المواقع على الإنترنت تخص هندسة الفراكتال؟ أو حفزك على الاستمرار فى قراءة ودراسة باقى فصول هذا الكتاب؟

من خلال تعليقاتك على هذه النقط ونقطاً أخرى تقدمها ستجد بنفسك مدى بداية نمو قدراتك الابتكارية التى سوف تعكسها فى تدريسك الإبتكارى بتلقائية. وسوف تبحث وتفتش عن حكايات نشأة الموضوعات الرياضية لتستخدم هذا المدخل.. مدخل نشأة موضوع رياضى وأهميته.

المراجع

١- جيمس جلايك (ترجمة على يوسف) (٢٠٠٠): «الهيولية تصنع علماً جديداً» القاهرة - المجلس الأعلى للثقافة.

٢ - أ.د/ نظلة حسن أحمد خضر (١٩٨٨): «حكاية زخرفة البلاط ولغز الميراث» سلسلة حكايات وألغاز رياضية تنمى التفكير الهندسي والابتكارى لسن ١٠ - ١٥ ومشوقة لجميع الأعمار. القاهرة - الهيئة المصرية العامة للكتاب.

٣ - أ.د/ نظلة حسن أحمد خضر (٢٠٠٢): «نم مواهبك الفنية والرياضية من خلال الحلزون مع روابطه وحكايات عليه». من سلسلة للصغير والكبير من سن ١٣سنة فأكثر القاهرة - الهيئة المصرية العامة للكتاب.

٤ - أ . د/ نظلة حسن أحمد خضر (١٩٨٦): الرياضيات لرياضة الأطفال. الكتاب الثالث - للموهوبين - القاهرة - هيئة الكتب بوزارة التربية والتعليم.

5- Krants, S-in Hermon, R (1991) "Fraclal Theory" The Mathematical Intelligencer, Vol 13 No 1 Winter, 1991 New York, Springer - Verlag.

6- Slomoczynski, W & Zastawniak, T (1999): "How Long Was The Coast of Atlantis".

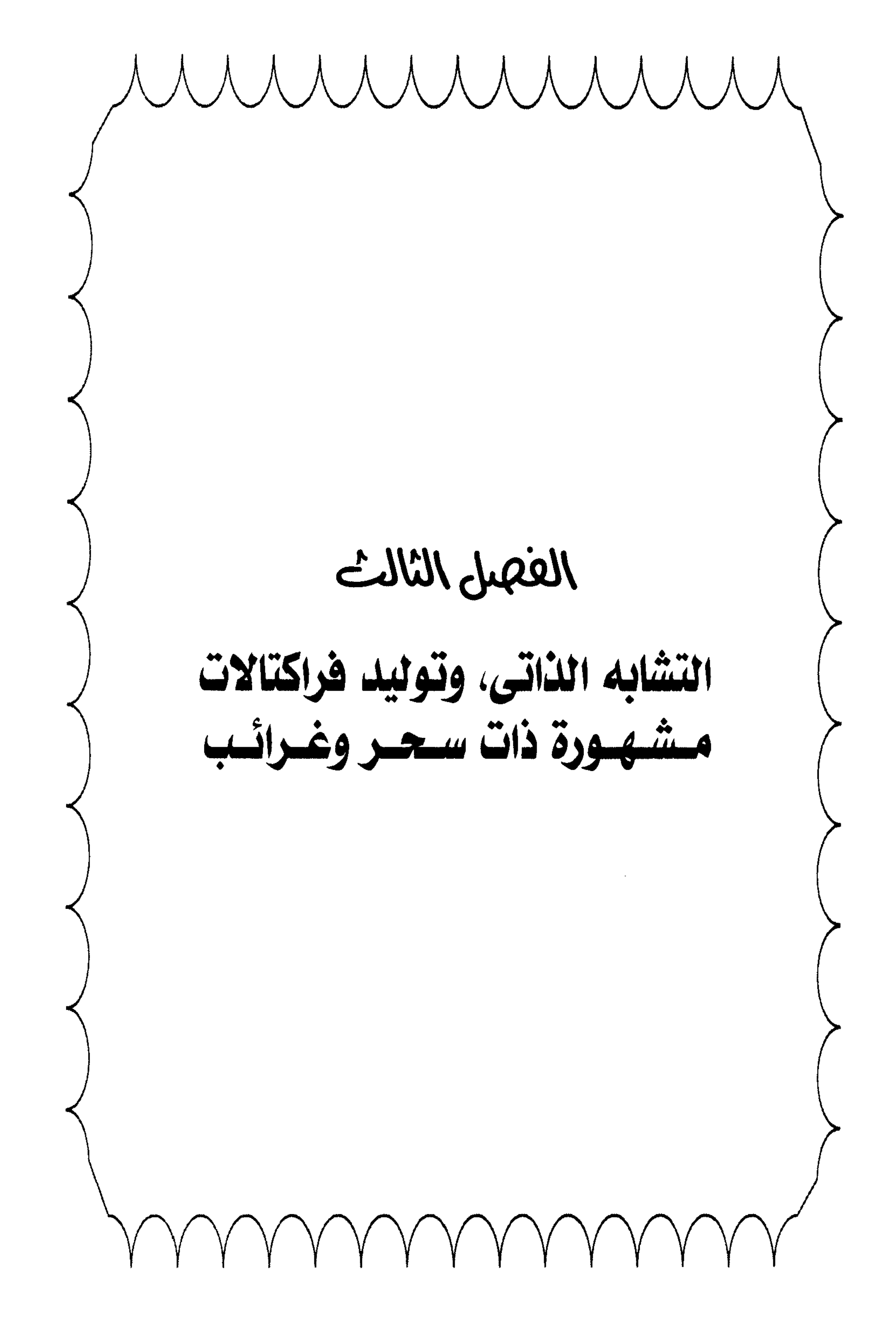
The Mathemalical Intelligencer, Vol 21 No 4 Witer 1999. New York, Springer - Verlag.

7- Thomas, D. A (2001): "Modern Gemetry" U.SA, Brooks/ Cole. Thomson learning.

www.angelfire

www.contest2k.com

www .math. rice.edu



الفصل الثالث

التشابه الذاتى، وتوليد فراكتالات مشهورة ذات سحر وغرائب

الفصل الثالث

التشابه الذاتى، وتوليد فراكتالات مـشـهـورة ذات سـحـر وغـرائـب

مقدمة:

عندما تقابل شخصًا ما لأول مرَّة تشعر كأنك تعرفه منذ سنوات، وهذا ما يحدث عندما تتعرف على أشكال متشابهة ذاتيا، فستجد أنك تألفها وكأنك تعرفها من قبل وهى أشكال تجدها حولك فى الطبيعة nature، وفى الزخارف القديمة (اليونانية القديمة ـ المصرية القديمة ـ العربية والفارسية)، وفى الزخارف وفى الفن الحديث. تجدها فى أشكال هندسية تعاملت معها... تجدها فى أشكال رياضية فرضية (اصطناعية).

وخاصية التشابه الذاتى Self Similarity هى خاصية أساسية لأشكال الفراكتال (الفراكتالات)، وقد يسميها البعض بخاصية التماثل الذاتى. فالفراكتالات أو الأشكال المتشابهة ذاتيا ببساطة هى أشكال لها نفس المظهر لأى (تكبير ـ وتصغير) فجزأ صغير من التركيب (للشكل) يبدو كأنه مثل الشكل الكلى. وعلى ذلك نحاول تقديم التشابه الذاتى من خلال أمثلة فى الطبيعة، وفى أشكال هندسية مألوفة، وفى الفن ثم نفرق بين التشابه الذاتى (الاحصائى) فى الطبيعة والفن وبين التشابه الذاتى (المضبوط) فى أشكال هندسية (مثل الشجرة الرياضية). وبالرغم من أن خاصية التشابه الذاتى موجودة فى فراكتالات مألوفة إلا أنها موجودة أيضا فى فراكتالات غاية فى الغرابة يتوه فيها العقل والخيال مثل فراكتالات مجموعة ماندلبورت، ومجموعة چوليا، وفراكتالات مقترنة بمجموعة حل معادلات تربيعية فى الأعداد المركبة.. ولهذا نشير إلى هذه الفراكتالات الغريبة ونعرض بعض صورها... لنمذج المألوف مع غير المألوف. هل تتصور وجود سطح لا نهائى مساحته صفر؟ أو شكل لجسم يشغل حيزاً لا نهائى فى فراغ ذى ثلاثة أبعاد حجمه صفر؟ أو محيط لا نهائى يحد مساحة محدودة... بالفعل يوجد فراكتالات تؤيد الإجابة بنعم لهذه الأسئلة....

وهذا ما سنتعرض له أيضاً. هل تريد أن تعرف كيف تنتج (أو تولّد) بعض فراكتالات مشهورة؟ هذا ما سوف نساعدك لتقوم بعملها أيضاً.

٣-١- التشابه الذاتى:

٣-١-١- التشابه الذاتى فى الطبيعة nature

إذا نظرنا إلى مقطع رأس لقرنبيط نجد أن شكل الرأس يتكرر بصورة أصغر وأصغر.... كلما صغرت وحدات أفرعها. تأمل الشجر وأفرعه، تأمل ريشة طائر، تأمل مقاطع مخ لطائر أو لحيوان، تأمل التركيب الداخلى لخضروات وثمار فاكهة، تأمل شجرا وقممه، تأمل جبالاً وقممها، تأمل نهرا وروافده..، تأمل تجزيعات وتفريعات ورقة نبات، تأمل تفريعات تزين جناح فراشة (أو بعوضة). تأمل قرون غزال وتفريعاتها؛ تأمل تشققات أرض جافة..، تأمل أنسجة تحت المجهر......



شكل (١)

سوف تجد أن هذه الأشياء الطبيعية مثلها مثل رأس القرنبيط لها خاصية التشابه الذاتى بمعنى أن كلٍّ منها شكل يمكن تقسيمه إلى أجزاء كل منها يكون على الأقل تقريبا شكل أصغر يشبه الشكل الكلى على مدى العديد من المقاييس. انظر شكل(١).

حاول أن تفكر فى أمثلة أخرى لأشكال متشابهة ذاتيا فى الطبيعة فستجد الكثير.

علاوة على ذلك فقد وجد شولتز[١] أن الزلازل كبيرها وصغيرها يتبع نمطاً فى كل مكان تقاس به يقابل المقاييس scales من تكبير وتصغير magnification كما فى التشابه الذاتى. واتضح أيضا لعلماء الجيوفيزياء (الفزياء الأرضية) أن الأسطح المختلفة الممتلئة بالشقوق والتصدعات والكسور الموجودة على هيكل الكرة الأرضية معظمها أشكال متشابهة ذاتيا. وأن تحكمها فى سريان الموائع فى باطن الأرض: الماء - البترول - الغز الطبيعى، وتحكمها فى تصرفات الزلازل يكون فهمه عن طريق الفراكتالات (الأشكال المتشابهة ذاتيا) وهندسة الفراكتال.

وقد لاحظ أيضاً علماء المعادن أن ابنعاجات وإتصال أسطحها تتضمن الأشكال المتشابهة ذاتيا. كذلك علماء الأحياء وجدوا فى الأوعية الدموية وشعيراتها أمثلة للتشابه الذاتى. فهى تتشعب وتنقسم إلى أصغر فأصغر فأصغر مثلها مثل الشعيرات الجذرية فى النبات.. كذلك تشعب الشعيبات الهوائية فى الرئة تتصرف بطريقة ثابتة مهما اختلفت المقاييس من أكبرها لأصغرها فهى لذلك تُعد مثالاً للأشكال المتشابهة ذاتيا..

الم أذكر أن التشابه الذاتى والأشكال المتشابهة ذاتيا مألوفة لنا فهى حولنا وفوقنا وتحتنا وداخلنا فى تكوينات الطبيعة.

ويعتبر التشابه الذاتى خاصية رئيسية فى أشكال الفراكتال (الفراكتالات) حتى أن شكل الفراكتال يعرف عن طريقها.

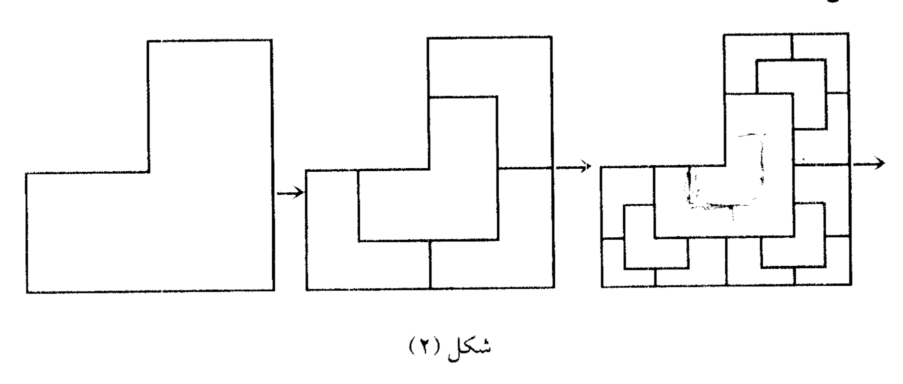
فيمكن تعريف الفراكتال[٦] Fractal بأنه شكل هندسى خشن (أو متكسر Fragmented) يمكن تقسيمه إلى أجزاء كل منها يكون (على الأقل تقريبا) شكل أصغر يشبه الشكل الكلى[١].

أما الشكل المتشابه ذاتياً Self Similar فهو الشكل المتكون من نماذج أصغر منه. وهو أيضاً فراكتال.

٣-٢-٢- التشابه الذاتى فى الأشكال الهندسية المستقيمة والأشكال الرياضية

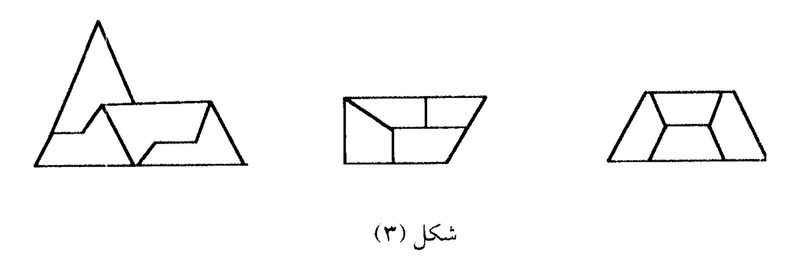
قدمت فى أحد كتاباتى (سلسلة حكايات وألغاز رياضية)[٢] مشكلة تتعلق

بتقسيم الميراث لقطعة أرض على شكـل مربع إلا ربع إلى أربعة أقسام كل منها مربع إلا ربع تشبه الشكل الأصلى لقطعة الأرض. ومن سيناريو الحكاية وأحداثها يتوصل القارىء (الطفل سن ١١ فـأكثر) إلى الحل الصحيح. ثم بالتكرار المـرحلى يقسم كل مربـع إلا ربع ناتج إلـى أربعـة مربعـات إلا ربع أصغـر مشابـهة لـه.. وهكذا. انـظر شكل(٢).



شكل (٢)

ثم تطبيق نفس النـمط من التقسيم والتكرار (المرحلى) على كـل تقسيم ناتج على شبـه منحرف مـتساوى الـساقين. فيـنقسـم الشكل الأصـلى إلى أربـعة أشكال شبـه منحـرفة متطـابقة تشبـهه وأصغر وأصـغر فى كل تـكرار.... وكذلك بالـنسبة لـشبه منحرف قـائم، وبالنسبـة لمثلث إلا ثلث......انظـر شكل (٣) وحاول رسم التـقسيم التالى لكل منها.

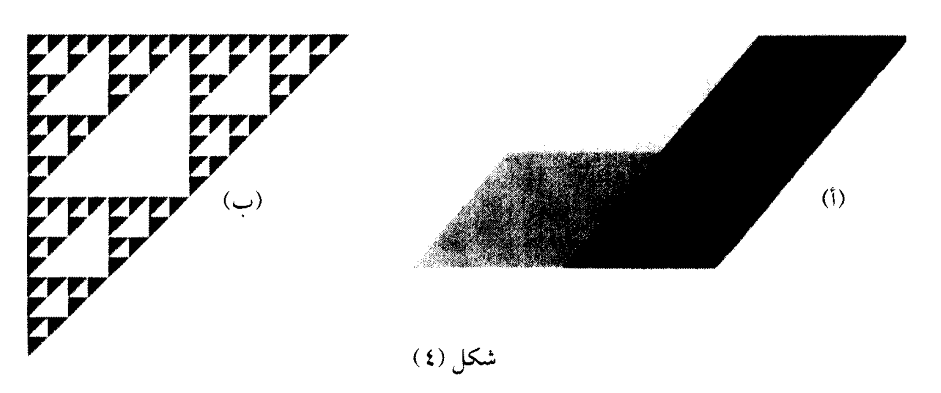


شكل (٣)

واضح أن كل شكـل من هذه الأشكال تعتـبر متشابهـة ذاتياً. ومع توالى التـقسيم

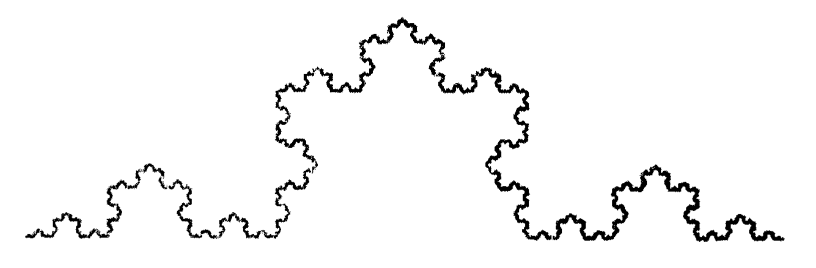
بنفس العملية (التكرار المرحلى الذى يحدد طريقة التقسيم) نحصل على أشكال أدق وأدق تشبه الشكل الأصلى. ومع الزيادة اللانهائية للتكرار المرحلى يمكن توليد شكل متشابه ذاتيا على عدد لا نهائى من المقاييس Scales .

والآن اشحذ ذاكرتك وحاول استرجاع أشكال هندسية مستقيمة تكون متشابهة ذاتيا فستتوصل إلى الكثير انظر شكل (٤).

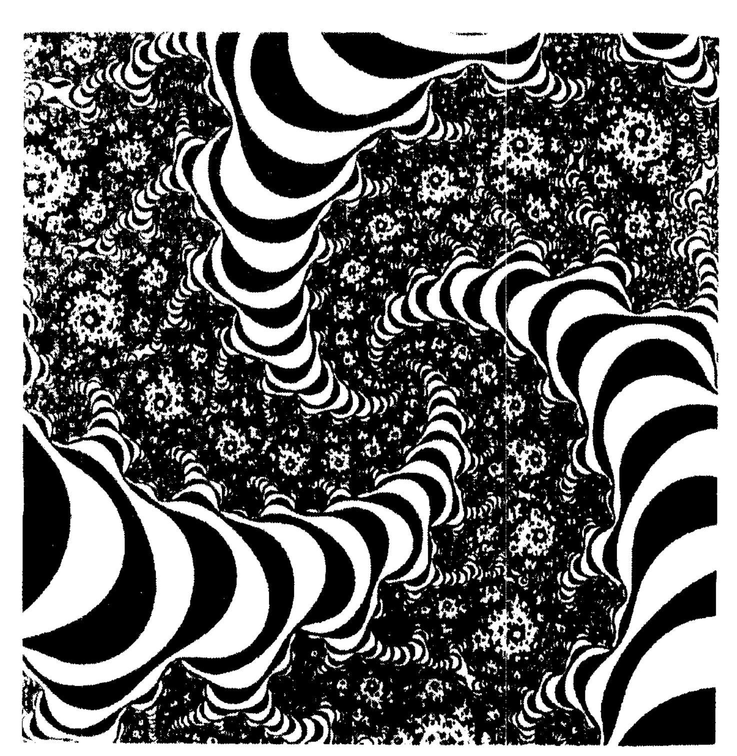


شكل (٤)

وقد استُخْدمت أشكال متشابهة ذاتيا فى الزخرفة منذ آلاف السنين (وأبسطها شكل ٤ أ) إلا أن اهتمام الرياضيين الحديثيين أمثال چوليا، وكوخ، وسيربينسكى كان منصباً على أشكال متشابهة ذاتياً على عدد لانهائى من المقاييس (من التصغير والتكبير enlargement) والتى أثارت ماندلبروت بعد ذلك فى اختراع هندسته، حيث سمى هذه الأشكال (المتشابهة ذاتيا) بالفراكتالات أو أشكال الفراكتال التى تعتبر من الفراكتالات المشهورة نسبة إلى الرياضيين الذين قدموها. مثل (فراكتال) منحنى كوخ لرقائق الثلج Koch Snow Curve (شكل ٥)، (فراكتال) مجموعة چوليا التى يتوه الخيال والعقل فى روعتها وجمالها (شكل ٦)، وفراكتال پينو، وفراكتال سبيرنيسكى.... وسوف نتعرض لهذه الفراكتالات المشهورة بشىء من التفصيل فيما بعد.. ولكنى أقدم الشكلين ٥، ٦ لأعطى لك فرصة لتأمل الجمال الظاهر والجمال الباطن لهذه الفراكتالات. ففى شكل (٥) أعطى صاحبها كوخ وصف برقائق الثلج. أما شكل (٦) فهو شكل معقد يمكن أن تناظر منه أشكال فى الطبيعة وفى الرياضيات وفى الفن، وفى الخيالات.

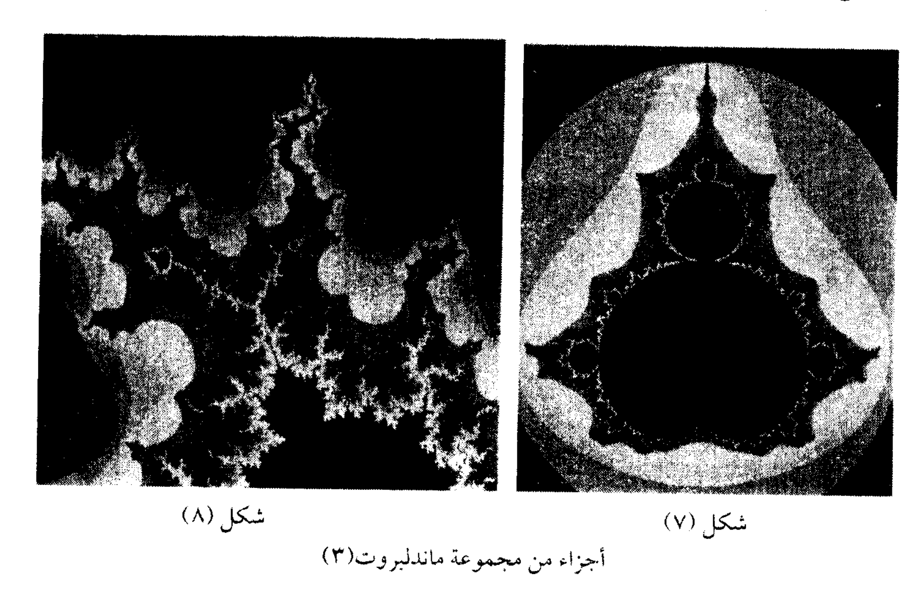


فراكتال منحنى كوخ لرقائق الثلج
شكل (٥)



فراكتال مجموعة چوليا (٣)
شكل (٦)

وتعتبر مجموعة چوليا مجموعة جزئية من أشهر وأجمل وأغرب فراكتال وهو فراكتال معروف مجموعة ماندلبروت Mendelbvort Set أعرضها فى شكل (٧) لأتيح فرصة للتأمل والإثارة والتشويق أيضا. وهى تعتبر لوحة فنية (خاصة الملونة) حيث تتميز بشفافية درجات الألوان المتنوعة. وهى (ومجموعة چوليا الجزئية منها) يتصارع فيها النظام واللانظام عند حدودها.

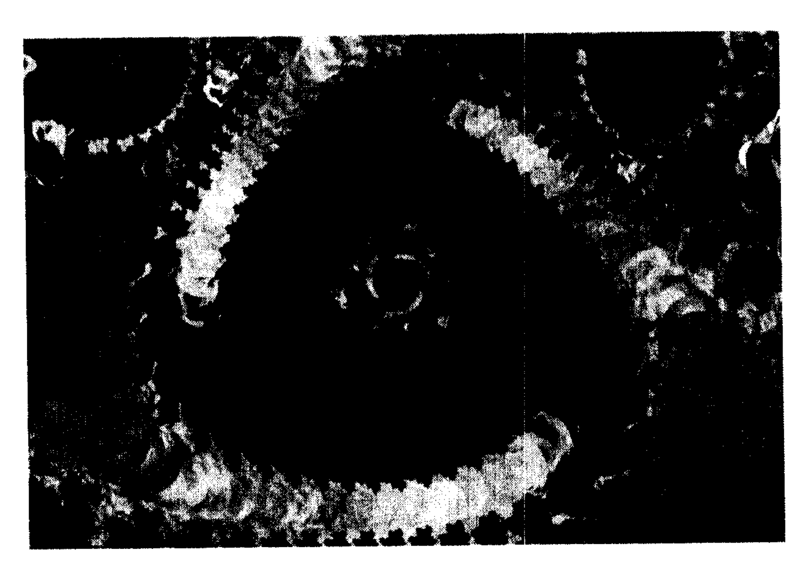


شكل (٧) شكل (٨)

أجزاء من مجموعة ماندلبروت(٣)

٣-١-٣: التشابه الذاتى فى لوحات فنية

بلاشك أننا قد لمسنا النواحى الجمالية والفنية فى تابلوهات فراكتالات مجموعة ماندلبورت ومجموعة چوليا (المتشابهة ذاتيا). ومن إعجاب بعض الفنانين لها فقد استخدموا برمجيات خاصة بالفراكتالات فى عمل لوحات فنية أقدم أحدها (شكل٩).



شكل (٩)
لوحة أبدعها فنان باستخدام برمجية للفراكتالات

أما لوحات الفنان پولاك[٥] التى أبدعها فى ١٩٥٠، ١٩٥٢ قبل تقديم هندسة الفراكتال ١٩٧٥ ودون معرفته بالفراكتالات، فقد تبين أنها عبارة عن أشكال تشابه ذاتى أنتجها بجهاز صغير يقذف الألوان على لوحة فى وضع أفقى بريتم (ايقاع) يمثل الطبيعة nature بإحساسه. حيث قام الفنان العالم تيلر بتحليل لوحات پولاك بالاستعانة بالكمپيوتر فإكتشف أن پولاك قد بنى طبقات من الألوان بتكنيك غاية فى العناية أنتج به شبكة كثيفة من الفراكتالات فى لوحة تبين دوامات من الألوان استغرق عملها ٦ شهور فى ١٩٥٢ (شكل١٠ (أ)) أما لوحته التى تعبر عن الخريف (فنقدمها فى شكل (١٠) ب). ومن المشوق أن نعرض فى شكل ١٠ (جـ) صورة لپولاك أثناء تلوينه بجهاز لقذف الألوان وعلى يمينها صور فوتوغرافية لأعشاب بحرية فى الطبيعة ولا تعليق بين لوحاته والصور الطبيعة التى ينقلها بإحساسه.



شكل (١٠) أ



شكل (١٠) ب



شكل (١٠) جـ

وبعد هذه الرحلة الممتعة فى الطبيعة والرياضيات والفن للتعرف على التشابه الذاتى الذى يعتبر خاصية أساسية للفراكتالات؛ نفرق بين نوعين من التشابه الذاتى فيما يلى:

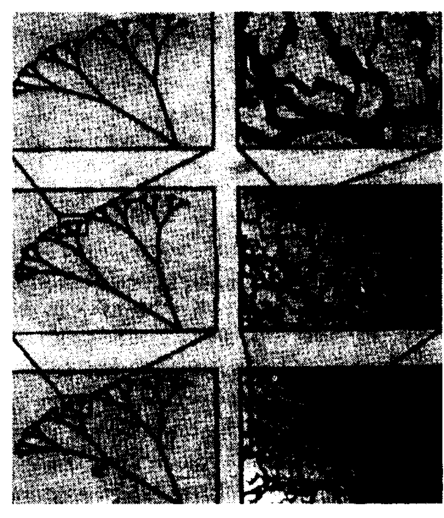
٣-١-٤: التشابه الذاتى المضبوط والاحصائى

عرفنا أن الفراكتال يُظهر التشابه الذاتى (أى هو شكل متشابه ذاتيا) أى له مظهر مشابه لأى مقياس من (تكبير ـ تصغير magnification). حيث يبدو أى جزء فيه مشابهاً للشكل الكلى. وربما لاحظت أنه فى الأشكال الرياضية تكون الفراكتالات أكثر انضباطاً بمعنى أن الأشكال الأصغر المنقسم إليها الشكل الكلى تكون مثله تماماً بمقياس ما والانقسام يتكرر بانضباط ولذا يسمى التشابه الذاتى فى الأشكال الرياضية (أو قد تسمى بالاصطناعية) بالتشابه الذاتى المضبوط.

وربما تكون لاحظت أيضًا أن الأشكال المتشابهة ذاتيا (الفراكتالات) فى الطبيعة

تكون فيها الأنماط المتشابهة (بمقاييس مختلفة - المصغرة) لا تتكرر بشكل مضبوط تماماً، بمعنى أن التشابه الذاتى يبدو متشابهاً فى الشكل لأى مقياس من التكبير أو (التصغير) فيما عدا إغفال بعض الملامح المعينة. إلا أن سمات الأنماط الاحصائية تتكرر. ولذا يسمى تشابهه ذاتى إحصائى. وللتوضيح نقدم شجرة رياضية (اصطناعية) كمثال للتشابه الذاتى المضبوط، وشجرة حقيقية فى الطبيعة كمثال للتشابه الذاتى الاحصائى فى شكل (١٠) د، هـ.

شكل (د)
شجرة حقيقية (تشابه ذاتى إحصائى)

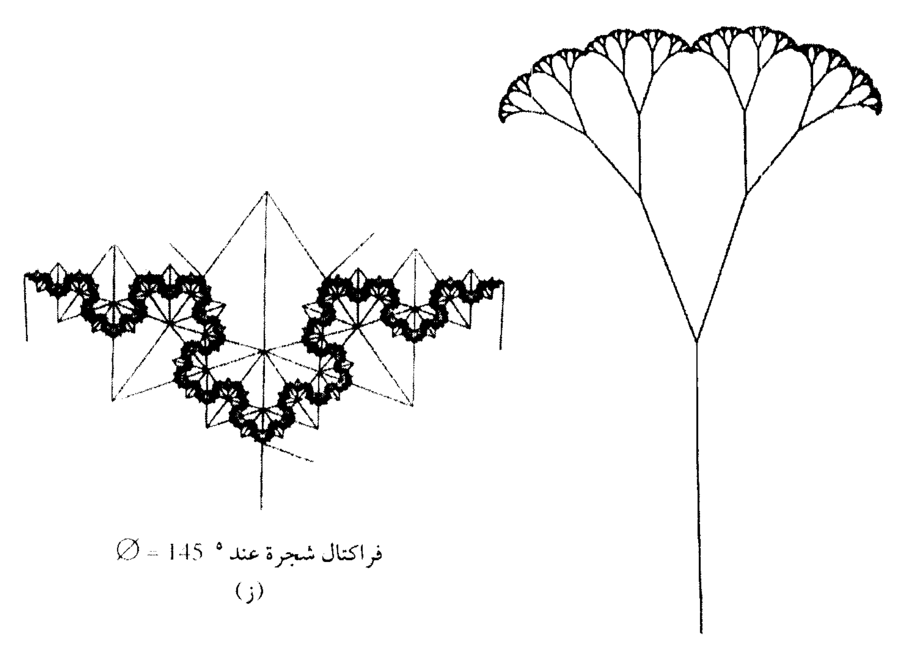


شكل (هـ)
شجرة اصطناعية (تشابه ذاتى مضبوط)

شكل (١٠) (هـ، د)

وعلى ذلك فالتشابه الذاتى فى الطبيعة أو فى الفن ولوحات پولاك يكون تشابه ذاتى إحصائى والتشابه الذاتى فى الرياضيات (الاصطناعى) يكون مضبوطاً.

ومن المشوق أن نعرف أن الشجرة الاصطناعية وفيها كل فرع ينقسم إلى فرعين متساويين بينهما زاوية ثابتة ∅ . عندما تساوى ١٤٥° يكون شكل قمتها من اليسار إلى اليمين هو فراكتال منحنى كوخ لرقائق الثلج. انظر شكل (١٠) ز أما شكل (١٠) و فشكل الشجرة عن ∅ = ٢٠° .



فراكتال شجرة عند ° 145 = ∅

(ز)

فراكتال شجرة عند ° 20 = ∅

(و)

شكل (١٠) و، ز

لاحظ هذه الشجرة الرياضية تجد أن تفريعاتها الثنائية تتسلسل، فى مرات تجد أحد الفرعين رأسيًا والفرع الآخر يميل عليه بزاوية ∅ يمكن أن تتغير فى كل حالة. طول الجذع وطول تفريعاته تعتبر بارامتر يتغير من حالة لحالة أيضاً. فى شكل (١٠)(ز) تنتج الشجرة قمة على شكل (فراكتال) منحنى كوخ لرقائق الثلج. وقد يتبادر إلى زهنك أن توليد (أو رسم أو إنتاج) هذا الفراكتال يستلزم نظام دوال مرحلية التكرار IFS عدد الدوال فيها ثلاثة. وهذا صواب ولكن هل هذه هى الطريقة الوحيدة لعمل (أو إنتاج) هذا الفراكتال؟ بالتأكيد يوجد طرق أخرى وأبسطها عن طريق المولد (منحنى مولد) واستخدام التكرار المرحلى. ولعلك تتشوق إلى معرفة هذه الطريقة البسيطة لتستطيع أن تنتج وترسم هذا الفراكتال وفراكتالات أخرى مشهورة وهذا ما سوف نتعرض له فى النقطة القادمة.

٣-٢-التكرار المرحلى iteration وطريقة بسيطة لتوليد الفراكتالات المشهورة

تقابلنا مع التكرار المرحلى عند تقديم الأشكال المتشابهة ذاتياً فى الأشكال الهندسية المستقيمة، ففى شكل (٢) السابق عند تقسيم مثلا المربع لا ربع إلى أربعة أشكال تشبهه كل منها مربع إلا ربع أيضا، كان الناتج فى الأجراء الأول أربعة أشكال متطابقة أصغر، كل منها مربع إلا ربع ثم أخذنا الناتج وأجرينا عليه مرّة أخرى نفس التقسيم على كل مربع إلا ربع منه فنتج ١٦ شكل مربع إلا ربعاً أصغر... وهكذا. أى أنه قمنا بتكرار خاص، حيث يكون ناتج التكرار الأول هو الذى نجرى عليه التقسيم فى التكرار الثانى... وهكذا.. ناتج (خارج) كل تكرار يصير الداخل فى التكرار التالى. ولذا يطلق عليه بالتكرار المرحلى iteration.

وفى الواقع فقد تذكر أنك تعاملت مع التكرار المرحلى عند اجراء تقريب تتابعى Successive approximation . مثل استخدام عدّة إجراءات (أو خوارزميات) لايجاد تقريبات لجذور المعادلات فى طريقة نيوتن. حيث استخدم نيوتن طريقة بسيطة لايجاد تقريبات للدوال عندما تكون قيمتها صفر. حيث قدم قانون ($x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$) يطبق بتكرار مرحلى بحيث يكون ناتج كل تقريب بداية للتقريب التالى. حتى يصل إلى أفضل تقريب للدالة د قيمتها صفر. أو بالأحرى تقريب لجذر المعادلة التى نبدأ بتخمينها قبل التكرارات المرحلية.

وعلى ذلك فالتكرار المرحلى iteration ليس مجرد تكرار. ولكنه تكرار (لعملية ـ اجراء ـ قاعدة...) يستخدم ناتج (مخرجات) كل تكرار كمدخلات فى التكرار التالى... وهكذا.

والتكرار المرحلى مرتبط بعملية توليد الفراكتالات المشهورة بأسلوب إتبعه الرياضيون أصحابها، ونحاول تبسيطه عن طريق تحويل هندسى يُسمى «بالمنحنى المولد» أو بإختصار المولد.

٣-٢-١ :توليد (فراكتال) منحنى كوخ لرقائق الثلج Koch Snowflake Curve

قد تستمتع بجمال زهرة متفتحة، ولكن بالتأكيد يزيد استمتاعك عندما تشاهد

عملية تفتح الزهرة رويداً رويداً حتى يكتمل تفتحها سواء كانت الزهرة أمامك فى حديقة أو مصورة فى التليفزيون بالحركة السريعة. وبالمثل يزيد استمتاعك بعمل ما من بدايته لنهايته أن تعيشه فى مراحله المختلفة.

فى البداية هيّأتك للتعرف على شكل منحنى كوخ لرقائق الثلج (شكل (٥)، (١٠)ز).

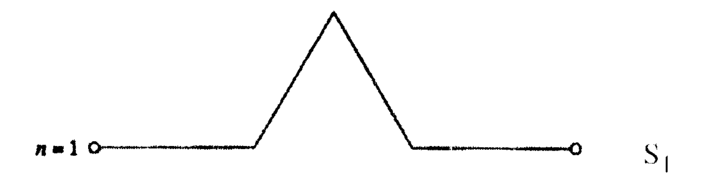
والذى أطلق عليه هذا الاسم هو العالم الرياضى السويدى هيلج فون كوخ (١٩٠٤) قبل أن نعرف أن هذا المنحنى هو فراكتال بمدّة طويلة.

والآن تعال نستمتع بعمله خطوة خطوة كأنه زهرة تتفتح من برعمها رويداً رويداً لنرى كثف الثلج وهى تتكون رقائق شيئا فشيئا.

البرعم هنا هو قطعة مستقيمة S_0 نبدأ بها العملية. نلاحظ أن التكرار المرحلى صفر ونرمز له n_0 .

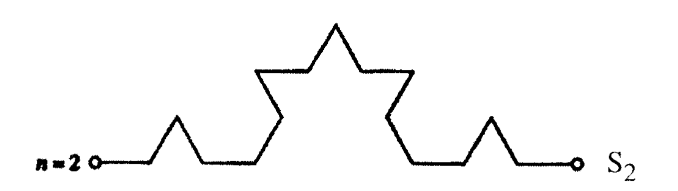
$n = 0$ ——— S_0

ثم نحول القطعة المستقيمة إلى الشكل التالى فى أول تكرار مرحلى n_1.

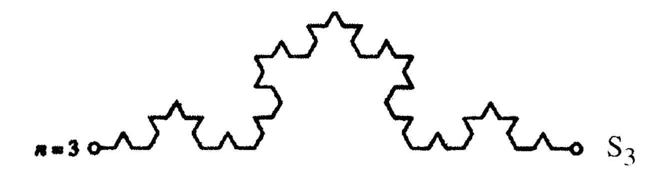


وذلك استبدال القطعة بالمنحنى الذى يشبه الشكل S_1. وذلك بتثليث القطعة المستقيمة واستبدال الثلث الأوسط بساقين مساويين لهذا الثُلث مكوناً شكل من أربعة قطع مستقيمة S_1. يسمى بالمنحنى المولد أو المولد generator .

وفى التكرار المرحلى التالى n_2 نقوم بتحويل كل قطعة مستقيمة للشكل الناتج فى التكرار الأول إلي شكل المولد. وذلك بتثليث كل قطعة من القطع الأربع واستبدال القطعة الوسطى لكل منها بساقى مثلث مساويين لهذا الثلث. فينتج الشكل التالى (S_2) بستة عشرة قطعة مستقيمة.



وفى التكرار المرحـلى الثالث n_3 نحول كل قطعة مستقـيمة من القطع ١٦ الناتجة فى شكل (S_2) للتكرار الثانى إلي الشكل المولد فينتج S_3.



لاحظ أن التكسيـرات (التعرجات) تكون أدق كلما زاد التكـرار المرحلى. وهكذا بتكرار هـذه العملية بعدد لا نـهائى من التكرارات المـرحلية $n\ \infty$ فإنـنا نـصل إلـى المنحنى المضبوط لرقائق الثلج لكوخ.

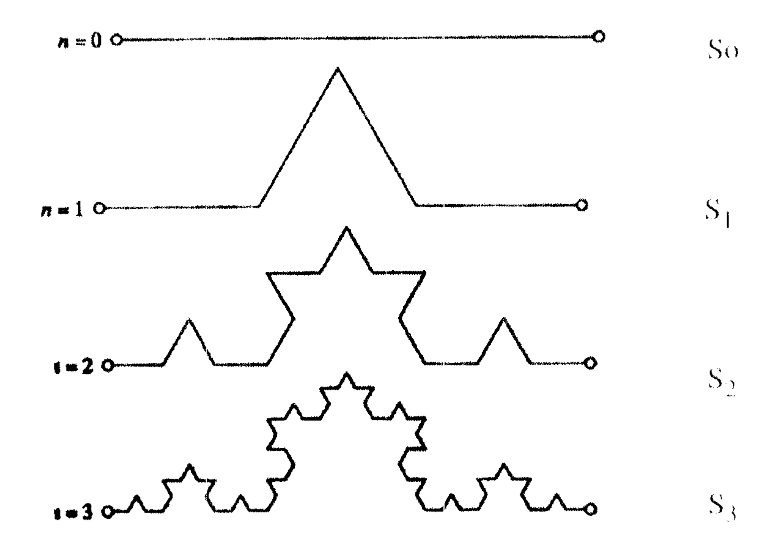
حاول رسم المنحنى بنفسك حـتى التكرار المرحلى الثالث n وخمّن طول مـحيطه عنده n_3 وعند التكرار المرحلى اللانهائى $n\ \infty$ ـ أنظر شكل (١١) أ.

والآن حاول تطبيق نفس المولد عـلى أضلاع مثلث متساوى الأضلاع حتى التكرار المرحلى الثالث n_3 وتخيل الشكل الناتج ثم إرسمه.

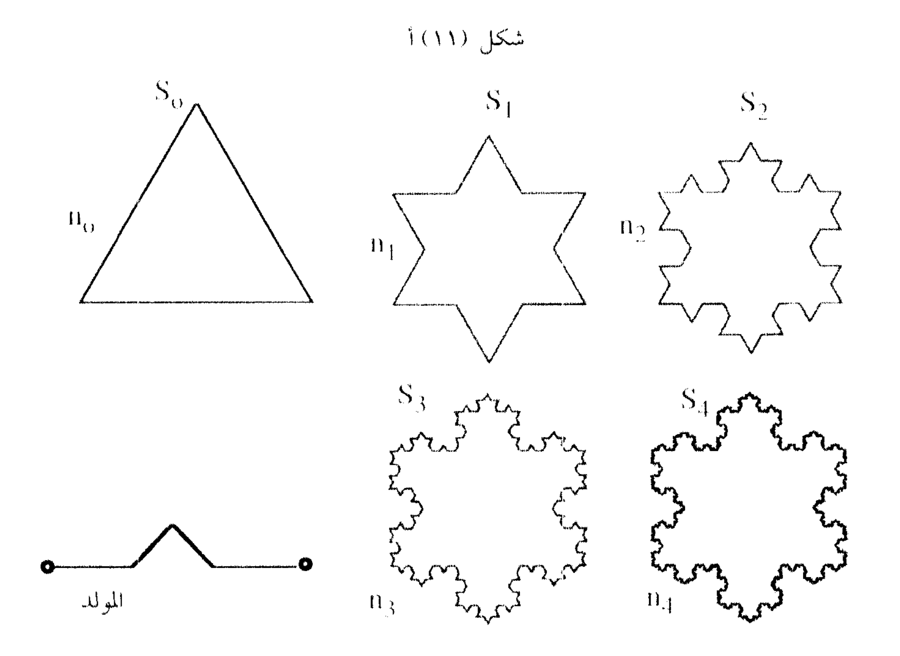
استخدم المولد السابق (عكسيا) أى بقمته إلى أسفل

وطبقه على أضلاع مثلث متسـاوى الأضلاع (أى طبق المولد إلى الداخل) وتخيل الشكل الناتج حتى التكرار المرحلى الثالث n_3 ثم تحقق بالرسم.

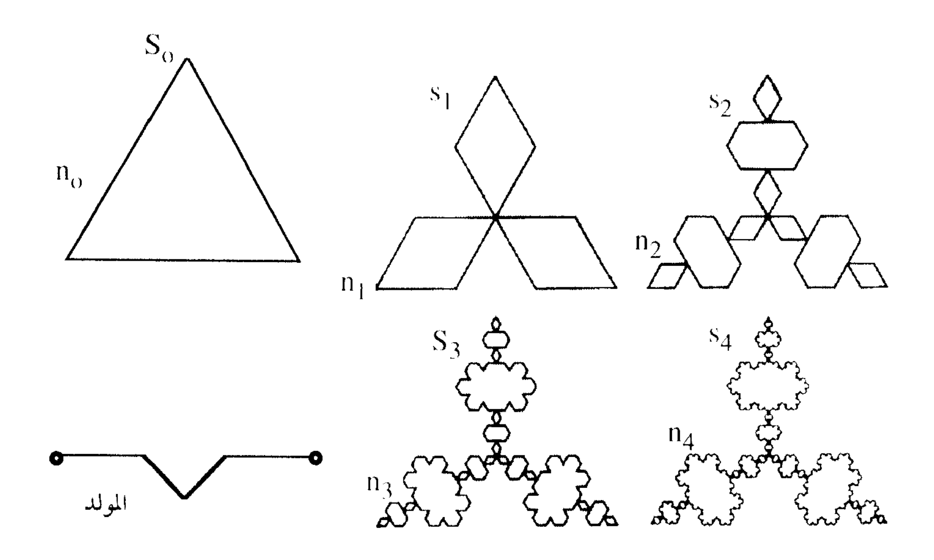
ستجدك تـوصلت إلى شكل (١١) ب الـذى يتضمن منـحنى كوخ لرقائـق الثلج (بتطـبيق المولد عـلى مثلث)، شـكل (١١)جـ الذى يـتضـمن منـحنى كوخ العـكسى لرقائق الثلج Koch Anti. Snowflake Curve .



شكل (١١) أ



شكل (١١) ب



شكل (١١) جـ. منحنى كوخ العكسى لرقائق الثلج

فى الأمثلة السابقة كان مولد الفراكتال هو منحنى يحدد التكرار المرحلى من مرَّة إلى أخرى. عند كل تكرار مرحلى كل قطعة مستقيمة لمنحنى الفراكتال المراد تكوينه (أو توليده) يستبدل بمقياس مناسب.

فى (فراكتال) كوخ لرقائق الثلج شكل (١١) أ كان المولد قمته إلى أعلى وفى فراكتال كوخ العكسى لرقائق الثلج كان المولد قمته إلى أسفل (شكل (١١) جـ).

وكان شكل الفراكتال فى كل منهما كرقائق الثلج (متعرج ومشرشر برقه) ولكنه كمنحنى لا يملأ جزء مسطح.

إعط لنفسك فرصة لتفكر فى شكل مولد لفراكتال يملأ سطح مربع مثلا.

هل سيكون الثلث الأوسط للمولد على شكل ضلعى مثلث أم شكل مربع؟

هل سيكون المربع على الثلث الأوسط للمولد إلى أعلى أو إلى أسفل؟ هل سيكون المولد ثلثه الأوسط يجمع بين مربع إلى أعلى ومربع إلى أسفل؟ ستجد الإجابة فى مولد فراكتال بينو التالى.

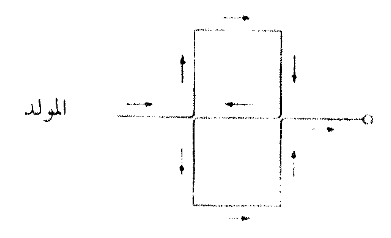
٣-٢-٢- توليد (فراكتال) منحنى بينو Peano

إستطاع العالم الرياضي الفرنسي بينو (١٨٥٠ - ١٩٣٢) أن يولد فراكتال يملأ مستوى. وهو معروف بمنحنى بينو لملء المستوى.

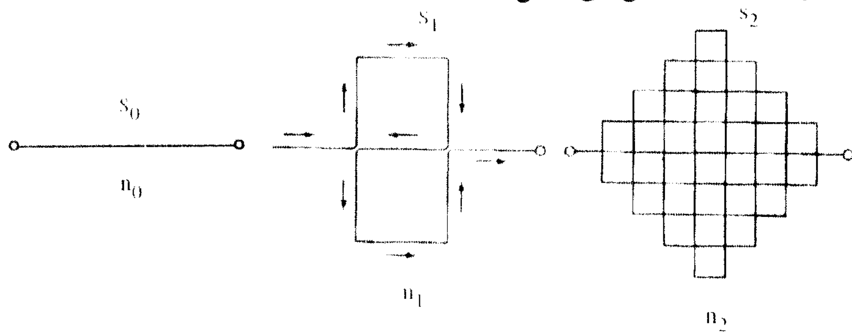
ولعل الأسئلة التي أثرتها في آخر البند السابق (٣-٢-١) تمهدك لشكل هذا المولد.

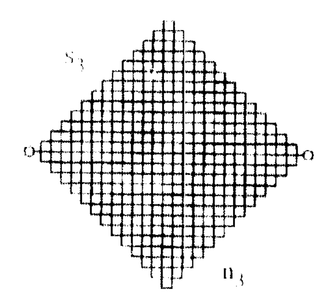
وكلما اقتربت من التوصل إليه كلما زادت ثقتي في أنك سوف تكون من المعلمين المجددين المبتكرين أو من المجددين الرياضيين.

المنحنى المولد لفراكتال بينو هو الذي يحول كل قطعة مستقيمة إلى الشكل.



والآن حاول رسم هذاالفراكتال (لبعض المقاييس) بتحديد التكرار المرحلي الأول والثاني والثالث فستصل إلى شكل (١٢).

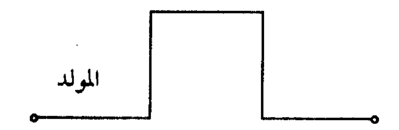




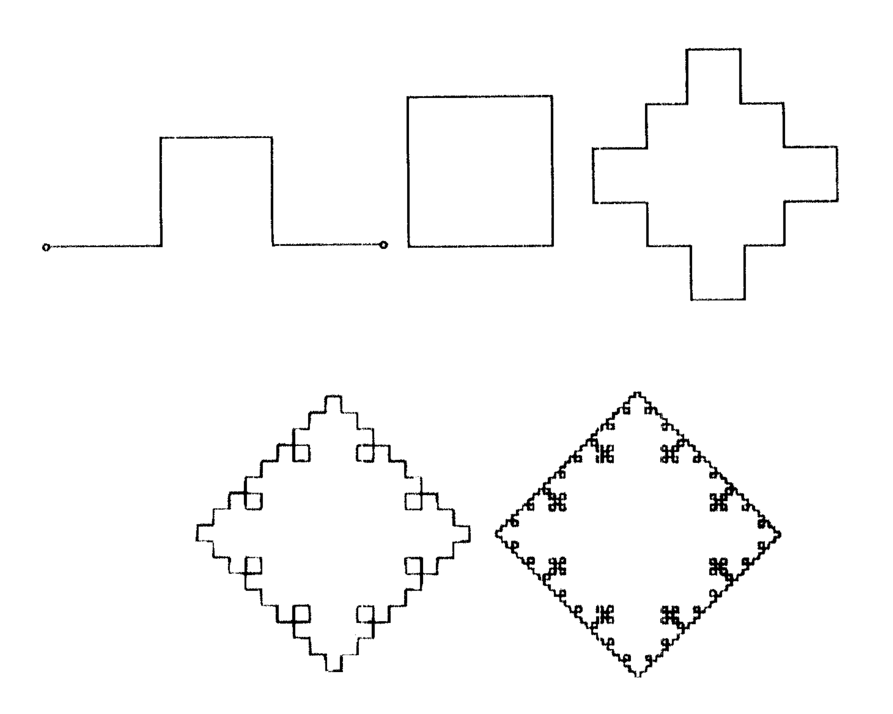
شكل (١٢) (فراكتال) منحنى بينو

وكلما زودنا التكرار المرحلى لإنتاج منحنى بينو مرَّة بعد مرَّة نجد أن شكل المربع الممثل يبدأ فى الظهور. وبزيادة أخرى التكرارات المرحلية تجد المنحنى المتكون يمر بنقط أكثر وأكثر لداخلية ذلك المربع وعندما تقرب التكرارات المرحلية اللانهائية $n \longrightarrow \infty$ فإن كل نقطة فى داخل المربع تصير نقطة نهائية Limit Point لمنحنى بينو. ولأنه لا توجد نقطة مفتقده فى المربع (وداخله) فان منحنى بينو يسمى مالىء المستوى Plane Filling . (لاحظ أنه يوجد تشاكل توپولوچي بين المربع والمستوى).

ونرجع الآن إلى الأسئلة التى قدمتها لإثارتك لمولد فراكتال بينو آخر بند (٣-٢-١) إذا كانت إجابتك تثليث القطعة المستقيمة واستبدال الثلث الأوسط بثلاثة أضلاع لمربع إلى أعلى. أى يكون المولد على شكل قبعة.



فهذا مستوى من الإبتكار فقد استبدلت ضلعى المثلث لمولد منحنى كوخ بثلاثة أضلاع مربع. وإن كنت حاولت رسم تكوين الفراكتال بالتكرار المرحلى المحدد بهذا المولد لعدد من المرات فانك تكون قد حاولت تحقيق الإجابة وهذا مستوى من التفكير الرياضى، وتكون توصلت للفراكتال فى شكل (١٥) (لمقاييس قليلة من التصغير) وكأنه شكل زخرفى جميل يزين منديل بأشغال اليد. ولكنه لا يملأ المستوى. إلا أنه يكوِّن حدود المربع.



شكل (١٥) مولد القبعة والفراكتال الناتج

وإذا كانت إجابتك قبعـه عكسية (الأضلاع الثلاثة للمربع علـى الثلث فى الوسط تكون إلـى أسفل) فهـذا مستوى ابتـكارى أعلى. وإذا تحقـقت من الإجابـة ورسمت الفراكـتال (سأترك المحـاولة لك) فنـجد أن هذا الفراكـتال يمر بعـدد أكثر من الـنقط الداخلة لمربع ولكن ليس بجميع النقط الداخلة للمربع مع نقط حدوده (أضلاعه).

أما مولد منحنى (فراكتال) بينو فهو تجديد لرياضى مجدد أصيل.

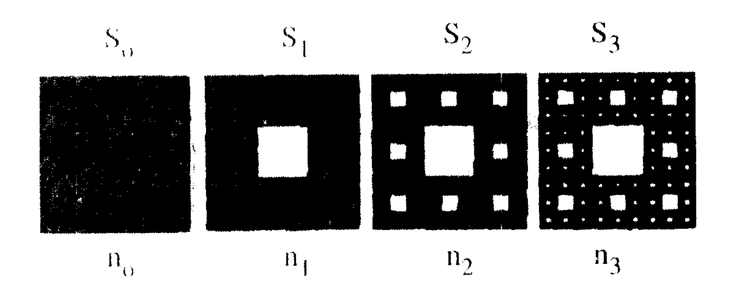
فى عملـية توليد (بنـاء) فراكتال كوخ وفراكـتال بينو استـخدمنا مولد عـبارة عن منحنى يـحدد التكرار المرحلى. سـنستبدل منحنى المـولد بعملية تصـف تحويل شكل (ليس بالضرورة قطعة مستقيمة) تحدد التكرار المرحلى كما فى البند التالى.

٣-٢-٣: توليد (فراكتال) سيربينسكى Sierpinski

فى البند السابق توصلنا إلى فراكتال منحنى بينو الذى يغطى كل نقط المربع وداخلية المربع (أى النقط على محيطه والنقط داخله، أى سطح مربع أو منطقه مربعة) . هل تتصور فراكتال بعكسه لا يمر بأى منطقة فى داخلية مربع.. تعال نتعرف عليه. إنه شكل قدمه الرياضى سيربينسكى فى ١٩١٥ ويسمى ببساط Carpet سيربينسكى . وبنفس فكرة عملية التحويل الهندسى على مثلث توصل إلى ما يسمى جوان gasket سيربينسكى. وتطبيق الفكرة على مجسم مكعب نصل إلى ما يسمى باسفنجية مينجر Menger Sponge.

إعط لنفسك فرصة للتفكير فى عملية تجعل من سطح مربع، منطقة تخلو شيئاً فشيئاً لمربعات أصغر فأصغر من النقط الداخلية!! حتى تخلو تماماً عند التكرار المرحلى اللانهائى!! هل ستصل إلى أن العملية تتضمن نزع جزء؟ فكرما هو شكل هذا الجزء وما موضعه بالنسبة للشكل الأصلى؟ حدِّد مستواك من خلال إجابتك ومدى قربها مما قدمه سيربينسكى فيمايلى.

للتوصل إلى فراكتال - شكل (بساط) سيربينسكى نستخدم عملية لتحويل هندسى مع التكرار المرحلى. تبدأ العملية بأخذ مربع So وتقسيمه إلى تسع مربعات متطابقة أصغر وفى أول تكرار مرحلى n_1 ننزع المربع الأوسط (أى تُسع المربع الأوسط). وفى التكرار المرحلى الثانى n_1 ننزع من كل مربع أصغر ناتج من التكرار المرحلى الأولى - التُسع الأوسط .... وهكذا نصل إلى (فراكتال) بساط سيربينسكى. حاول بالرسم التوصل إلى شكله بعد التكرار المرحلى الثالث (على مدى ثلاثة مقاييس من التصغير كما فى شكل (١٦).

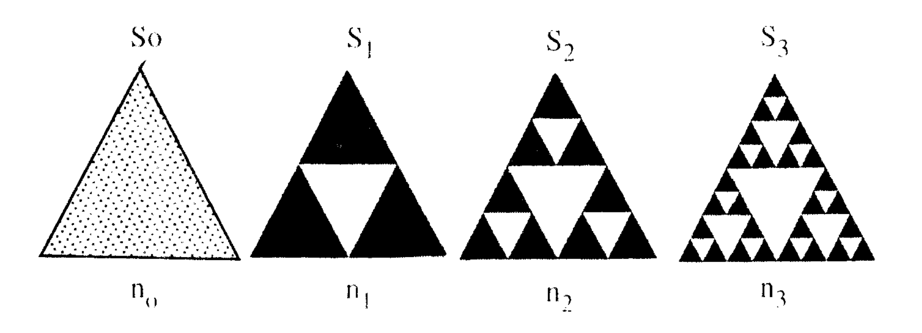


شكل (١٦) بساط سيربينسكى

لاحظ أن الفراغات مع تصغيرها فى كل تكرار مرحلى فإنها تزداد ... ومع التكرارات اللانهائية تزداد الفراغات لا نهائيا حتى تفرغ المربعات الجزئية المصغرة تدريجيًا.

إذا أردنا تطبيق نفس الفكرة السابقة على سطح مثلث فماذا تتوقع أن يكون شكل الجزء الأوسط الذى سوف ينزع فى عملية التحويل الهندسى الذى يفرغ داخلية المثلث..؟ ستجد نفسك تصل إلى الإجابة الصحيحة بسهولة بعكس صعوبة التوصل إلى الإجابة الصحيحة فى السؤال السابق الذى مهدت فيه لفراكتال بساط سيربينسكى.

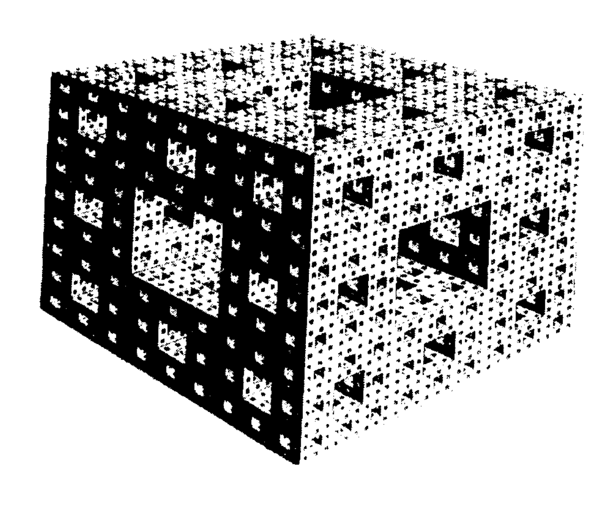
وعلى ذلك حاول تكوين فراكتال جوان Gasket (مثلث) سبيرنيسكى... إذا لم تستطع فابدأ بمثلث متساوى الأضلاع S_0 وقسمه إلى أربعة مثلثات متكافئة. وفى التكرار المرحلى الأول n_1 انزع رُبع المثلث الأوسط فتصل إلى S_1. وفى التكرار المرحلى الثانى n_2 انزع من كل مثلث صغير ناتجة رُبعه الأوسط.. وهكذا فتصل إلى شكل (١٧).



شكل (١٧) جوان سيربينسكى

وعند التكرارات اللانهائية تصل إلى شكل متشابه ذاتيا على كل المقاييس (اللانهائية فى الصغر) الذى يكاد يخلو شيئاً فشيئاً من مثلثاته الجزئيه الداخلية. وبنفس فكرة تكوين (فراكتال) بساط سيربينسكى، حاول الامتداد بها لتطبقها على مكعب S_o وقسمه إلى تسع مكعبات متساوية (متطابقة)

وفى التكرار المرحلى الأول إنزع تُسعة الأوسط. وفى التكرار المرحلى الثانى انزع التسع الأوسط من كل مكعب أصغر وهكذا... ستصل إلى شكل (١٨) إلى ما يسمى اسفنجية منجر.



شكل (١٨) اسفنجية منجر

بالتأكيد فراكتال سيربينسكى عند التكرارات اللانهائية (وأيضاً اسفنجية منجر) لها هيكل بالغ التعقد يتضمن فراغات (وثقوب) خيالية!

وفى الواقع يرجع الفضل للرياضين (الحديثين) كوخ، بينو، سيربينسكى وجوليا (وهاوسدورف) فى أوائل التسعينيات الامتداد بالأشكال ذات التشابه الذاتى المستخدمة فى الزخارف منذ آلاف السنين وفى الرياضيات، إلى مفهوم التشابه الذاتى الذى يتضمن أشكال متشابهة ذاتيا على عدد لا نهائى من المقاييس (من التصغير).

ولقد تعرفنا على أشكال متشابهة ذاتيا قدموها بأسمائهم تعكس الروح الرياضية التجديدية لهم. وهى أمثلة أعيد الانتباه إليها لسحرها وغرابتها بعد عشرات السنين.. لتكون أمثلة للفراكتالات. ولا يقتصر سحرها وغرابتها على عملية تكوينها أو توليدها ولا على التعقد الغريب فى شكلها.. فقط ولكن يرجع جمال سحرها وغرائبها إلى خصائص لها بعيدة التصور، سنتعرض لها فى البند التالى.

٣-٢- سحر وغرائب لخصائص بعض الفراكتالات المشهورة

مهدت وألمحت لبعض الخصائص المثيرة العجيبة من خلال العرض السابق (بند ٣-٢). لفراكتالات كوخ، بينو، سيربينسكى. تعال نلقى الضوء عليها ونحددها.

٣-٣-١: سحر وغرائب (فراكتال) منحنى كوخ لرقائق الثلج.

تذكر أننى طلبت منك تخمين (أو حساب) طول فراكتال منحنى كوخ لرقائق الثلج بالرجوع إلى شكل (١٠)أ. ثم قدمت شكل(١١)ب لفراكتال منحنى كوخ لرقائق الثلج (على مثلث). حاول حساب محيطه (أو تخمين طوله) وحساب مساحة المنطقة الداخلية له. .... هل ستصل إلى أغرب خاصية.... محيط لشكل فراكتال طوله لا نهائى يحد مساحة محدودة؟ بالطبع هذه خاصية عجيبة عما تعودنا عليه فى الرياضيات البحتة. فمثلا إذا رسمنا مضلع داخل (أو خارج) دائرة وبالتكرار العادى بزيادة أضلاعه حتى تؤول إلى ما لا نهاية فإن مساحة الشكل المضلع تقترب من مساحة الدائرة (المحدودة) وكذلك محيط المضلع يقترب من محيط الدائرة (المحدود) أيضا...

تعال نتحقق من صحة هذه الخاصية الغريبة: محيط (فراكتال) منحنى كوخ لرقائق الثلج (على مثلث) طوله لا نهائى ويحد مساحة قيمتها محدودة.

أولاً: طول فراكتال منحنى كوخ لرقائق الثلج لا نهائى:

إذا رجعنا إلى شكل (١١)ب لتكوين منحنى كوخ لرقائق الثلج (على مثلث). نجد أننا فى كل تكرار مرحلى iteration للعملية التى استخدمناها وهى تحويل هندسى بالمنحنى المولد حيث تبدل كل قطعة مستقيمة بنسخة من المولد طوله $\frac{٤}{٣}$ من القطعة المستقيمة المبدلة. وبالتالى فإن طول محيط المنحنى يزداد بمعامل $\frac{٤}{٣}$ فى كل تكرار مرحلى.... هل هذا الارشاد يكفى إلى أن تتوصل بنفسك أن طول (فراكتال) هذا المنحنى ∞ ؟... إذا لم تتوصل إستعن بالشكل (١٩) والتوضيح التالى:

بالبداية بمثلث S_0 الذى طول ضلعه ل فإن محيطه ٣ ل (عند n_0).

فى التكرار المرحلى n_1 يصير محيطه $٣ \times \frac{٤}{٣}$ ل $= ١٢ \frac{ل}{٣}$.

فى التكرار المرحلى الثانى n_2 يصير محيطه $٣ \ (\frac{٤}{٣})^٢$ ل $= ٤٨ \frac{ل}{٩}$.

وهكذا فى التكرار المرحلى النونى n_n يصير محيطه $٣ \ (\frac{٤}{٣})^ن$ ل $= ٤^ن \times ٣ \frac{ل}{٣^ن}$

$= ٣$ ل$(\frac{٤}{٣})^ن$

وبأخذ النهاية عندما ن ⟵ ∞ فإن نهاية طول المحيط = ∞ .

ثانيا: المساحة التى يحدها فراكتال منحنى كوخ لرقائق الثلج محدودة

نبدأ بمثلث S_0 نفترض أن مساحته هى الوحدة (عند n_0)

فى التكرار المرحلى الأول n_1 أضفنا ثلاثة مثلثات مساحتها $٣ \times \frac{١}{٩}$.

فى التكرار المرحلى الثانى n_2 أضفنا ١٢ = ٣ × ٤ مثلث مساحتها

$٤ \times ٣ \ (\frac{١}{٩})^٢ = ١٢ \ (\frac{١}{٩})^٢$

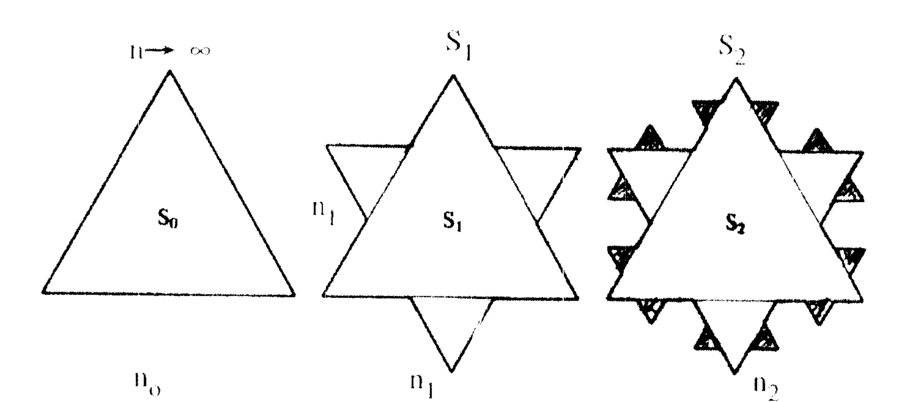
فـــى الـتـــكرار الـمـرحلـــى الـــثالث n_3 أضفنـا ٤٨ = ٣ × ٢٤ مثـلـثاً مساحتها ٤^٢ (٣) $(\frac{١}{٩})^٣$ = ٤٨ $(\frac{١}{٩})^٢$

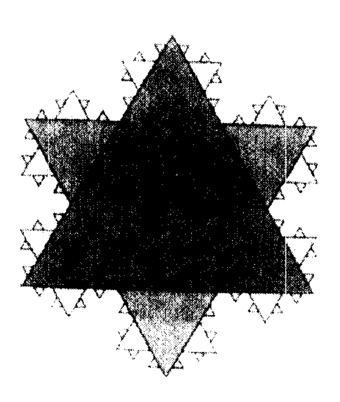
فى التكرار المرحلى النونى n_n أضفنا ٤^ن - ١ (٣) مثلثاً مساحتها

٤^ن - ١ × ٣ $(\frac{١}{٩})^ن$.

وبذلك يصير مساحة الشكل (المثلث S_0 + المثلثات المضافة) =

$$\lim_{n \to \infty} 1 + \frac{1}{3} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{4}{9}\right)^{i-1} = 1.6$$





(التظليل للمثلثات المضافة فى التكرارات المختلفة)

شكل (١٩)

٣-٣-٢ سحر وغرائب (فراكتال) منحنى بينو

هل تتصور أشكالاً مستقيمة غير متقاطعة مهما تعددت قطعها المستقيمة المتصلة يمكن أن تغطى (تمر) بكل نقط سطح مربع أو أى سطح آخر يتشاكل (توپولوچيا) معه؟

فكل ما نعرفه أن سطح المربع يملأه وحدات مربعة أصغر وهكذا...

وقد تتذكر أن دودة الحرير تستطيع ملء سطح الشرنقة بخيط حرير (متصل). ولكن خيط الحرير مهما كان رفيعاً فإن جزءًا منه لا يمثل قطعة مستقيمة لأن القطعة المستقيمة لا سُمك لها بالمرة. بالاضافة إلى أن خيط الحرير يتقاطع مع نفسه عند عمل الشرنقة. بينما أى فراكتا ل لا يتقاطع مع نفسه. أيضا القطعة المستقيمة أو أى مجموعة من القطع المستقيمة المعدودة لها طول ولكن ليس لها مساحة.

وقد أشرنا عند تكوين فراكتال بينو عن طريق المنحنى المولد له (شكل١٢) كيف أن هذا الفراكتال الذى يزداد إنتظاماً فى تعرجاته يغطى سطح المربع عندما تقترب التكرارات إلى ما لا نهاية ∞ n فهذه خاصية لأعجب فراكتال متولد من أعجب منحنى مولد.

٣-٣-٣- سحر وغرائب فراكتال سيربينسكى

هل يتصور أحد وجود سطح لا نهائى مساحته صفر؟

هل يتصورأحد وجود مجسم لا نهائى حجمه صفر؟

إرجع إلى تكوين بساط سيربينسكى وچوان سيربينسكى شكلى ١٦، ١٧ ستكتشف بنفسك أن هذه الأسطح هى أسطح تتفرغ (أو تتثقب) تدريجيا فى التكرارات المتتالية، وفى التكرارات اللانهائية ∞ n لا يكاد يتبقى من داخلية السطح إلا شكل بالغ التعقيد لا يشغل جزء من وحده مساحة مهما صغرت صغراً لا نهائياً. ولذا يعد فراكتال سيربينسكى مثالاً لأعجب خاصية، سطح مساحته صفر.

ونظراً لتشاكل المربع أو المثلث مع سطح لا نهائى، فهو يعد مثالاً لخاصية أكثر غرابه وهى سطح لا نهائى مساحته صفر.

ويمكنك التوصل إلى ذلك بالرجوع لشكل (١٦) وحيث مهدنا إلى أن مجموع مساحات المربعات المنزوعة فى التكرارات $n_1, n_1, ..., n_n$ وعندما تؤول إلى ما لا نهاية يكون المربع (أو بالأحرى سطح المربع) النهائى مفرغ من أى منطقه مربعه مهما صغرت ومساحته صفر.

حاول التحقق من ذلك من خلال تعريف المربع الأصلى S_0 ومساحته الوحدة.

$$S_0 = \{(x,y) : o \leq x , y \leq 1\}$$

ثم الشكل S_1 فى التكرار الأول

$$S_1 = \{(x,y) : (x,y) \in S_0 \ \& \ x or y \notin (\frac{1}{3} , \frac{2}{3})\}$$

الشكل S_1 فى التكرار الأول كإتحاد ثمانية مربعات من تسعة مربعات صغيرة للمربع S_0 بطول $\frac{١}{٣}$ للضلع عند نزع المربع (الجزئى) الأوسط.

ثم نعرف الشكل S_2 بأنه S_1 منزوع منه مربع جزئى طول ضلعه $(\frac{١}{٣})^٢$ لكل مربع جزئى للشكل S_1 وهكذا...

ثم نوجد $S = \bigcap_{n=o}^{\infty} S_n$

فتجدها مساوية للصفر أى أن مساحة الشكل S فى التكرار اللانهائى = صفر وبنفس الأسلوب يمكنك التوصل إلى أن فراكتال چوان سيربينسكى يؤدى إلى أن سطح مثلث المطبق عليه عملية توليد هذا الفراكتال مساحته تساوى صفر ويمكنك التحقق من ذلك بأخذ S_0 (شكل ١٧) بسطح مثلث متساوى الأضلاع طول ضلعه ل. وبإعتبار أن S_0 هو اتحاد أربعة مثلثات طول ضلع كل منها $\frac{ل}{٢}$.

ونعرف S_1 بأنه S_0 منزوع منه المثلث الأوسط من الأربعة مثلثات المكونة له...
وهكذا ننزع أواسط المثلثات الثلاثة للشكل S_1 لنكون S_2 وهكذا ثم عرف وأوجد

$$S = \bigcap_{n=o}^{\infty} S_n$$

فتجد أن مساحة الشكل فى التكرار اللانهائى = صفر.

وبنفس الأسلوب يمكن التوصل إلى أنه فى الفراغ الثلاثى تكون اسفنجية منجر

Menger Sponge فراكتال ذا حيز فى الفراغ حجـمه صفر. (شكل ١٨) ولكون هذا الفراكتال المتكون من تطبيق عمـلية لتوليده علـى مجسم مكعب، والمكعـب يتشاكل توپولوچيا مع مجسم (حيز) لا نهائى. فإن هذا الفراكتال يعتبر مثالاً لمجسم (حيز) لا نهائى حجمه صفـر. هل يوجد سحر وغرائب أكبر من التى (لفـراكتالات) لمنحنيات كوخ Koch، وبينو، وسبيرنيسكى، ومنجر...)؟

ولقد كـان لهذه الخصائص الـعجيبة للـفراكتالات المشهـورة أثر كبير فى اسـتثارة ماندلبروت لإختراع وبلورة هندسة الفراكتال.

والواقع أن حـيز (فى فراغ ذو بـعدين وذو ثلاثة أبـعاد) مقيـاسه صفر ربمـا تكون فكرته قد نبعت من مجموعة كانتور Cantor Set (١٨٨٣). وتتكون عن طريق قطعة مستقـيمة S_0 ننزع ثلثهـا الأوسط لنصل إلى S_1 . ثم ننزع الثلث الأوسـط لكل قطعة متـبقيـة فى S_1 لنـصل إلـى S_2 .. وهكذا نصل فـى التكرار المرحلى اللانـهائى إلى المجـمـوعـة S المحتويـة على عدد من النـقط الممكن عددهـا (معدودة) Countable المتفـرقة مقياس طـولها = صفر. (لاحظ أن مـجموعة نقـط معدودة ليس لـها طول، ومجموعة قطع مستقيمه معدودة ليس لها مساحة)

انظر شكل (٢٠) لأن $S = \bigcap_{n=o}^{\infty} S_n = o$.

شكل (٢٠) تكوين مجموعة كانتور للتثليثات

ويمكن أن تتوصل إلى ذلك عن طريق تعريف $S_0 = [0,1]$،

$$S1 = [0\ \frac{1}{3}\ ] \cup [\frac{2}{3}\ 1]$$

$$S2 = [0\ ,\frac{1}{9}\ ] \cup [\frac{2}{9}\ ,\frac{1}{3}\ ] \cup [\frac{2}{3}\ ,\frac{7}{9}\ ] \cup [\frac{2}{3}\ ,\frac{7}{9}\ ] \cup [\frac{8}{9}\ ,1]$$

.... وهكذا

لاحظ أن S_n هى اتحاد فترات جزئية مقفولة Closed عددها 2^n من الفترة $[0,1]$، وتكـون على شـكل: $[r/3^n, (r+1)/3^n]$, For appropriate integer r وكـل فتـرة جزئية طولها $1/3^n = 3^{-n}$، $S_{n+1} \subset S_n \subset [0,1]$

وعلى ذلك تكون S هى مجموعة كل النقط المشتركة فى S_0, S_1, S_2

أى أن $S = \bigcap_{n=0}^{\infty} S_n$

وبذلـك S لا تحوى أى فترات جـزئية. لأن $[0,1]$ التى تحوى عددًا لا نـهائيًا من الفترات الجزئية لا تتقاطع مع S.

وبملاحظة أن طول $S_0 = [0,1]$ هو ١، وطول S_1 هو 2/3

وطول S_{n+1} هو $\frac{2}{3}$ لطول S_n . وهذا يؤدى إلى أن طول

$$S_n = (\frac{2}{3})^n$$

وبأخذ النهاية عند $n \to \infty$ فإن طول $S = O$.

أى أن طول مجموعة كانتور للتثليثات مساوى للصفر.

وهنا نتـساءل هل فكرة استبعاد الجزء الأوسط لمجموعة كانتور هى التى أوحت إلى فكرة استبعاد المربع الأوسط فى تكويـن بساط سيربينسكى أو أوحت إلى فكرة استبدال الجزء الأوسط بساقين متساوين لمثلث فى المنحنى المولد لفراكتال كوخ Koch لرقائق الثلج، أو بالجزء الأوسط فى مولد بينو... إذا كانت الإجابة بنعم! فماذا سوف يلهم الرياضيون أو يلهمك من توليد الأشكال المشهورة ذات الأفكار المتجددة ومن خصائصها العجيبة الغريبة الساحرة؟ سوف تتعجب أكثر عندما تعلم أن هذه الخصائص العجيبة تفسر ظواهر فى الطبيعة nature والتكنولوجيا.

فمثلا من مجموعة كانتور (للتثليثات) وما تؤول إليه من نقاط طولها صفر كأنها غبار موزع بطريقة معينة هى التى تصوَّرها ماندلبورت فى توزيع التشويش على خطوط الإتصال. فقد وجد ماندلبروت فى مجموعة كانتور نموذجاً لحدوث الأخطاء فى قنوات الاتصال. حيث تظهر فترات خالية من الشوشرة ثم فترات لظهور مفاجىء لها. وبتحليل دقيق لفترات الشوشرة ذاتها وجد أنها تحتوى على فترات خالية منها.

كما أن خاصية (فراكتال) منحنى كوخ لمحيط لا نهائى يحد مساحة محدودة نجد أمثلة لـه فى جسم الإنسان وفى النبات. فالأوعية الدموية المتشعبة (المتشابهة ذاتياً) أطوالها لا نهائية ولكنها تحيط بحيز محدود من الدم الذى يعتبر غاليا جدًا. وكذلك بالنسبة للشعيرات الجذرية فى النبات اللانهائية فى الطول وتكتنز الحيز المحدود للماء الغالى جدًا. وكذلك بالنسبة لملايين الحويصلات الهوائية للرئتين التى حيزها محدود والهواء المنقى الغالى جدًا جدًا.

وقد يكون D.N.A يختزن قواعد تحويل بسيطة مثل المولدة لمنحنيات كوخ وسيربينسكى ليختزن معلومات التشعبات الهائلة فى الجسم.

وفى ختام هذا الفصل أرجو أن نكون قد وضحنا الفراكتال بخاصية أساسية له هى التشابه الذاتى. فأى شكل يتكون من نماذج مصغرة له نسمية متشابه ذاتيا. سواء على عديد من المقاييس Scales أو على مدى كل المقاييس. وقد وسع مفهوم التشابه الذاتى الرياضيون الحديثون كانتور، هاوسدورف، وجوليا وكوخ وبينو، وسبيرنيسكى.. ليشمل الأشياء (الأشكال) المتشابهة ذاتياً على مدى المقاييس اللانهائية. وقدمنا تعريف الفراكتال كشكل له خاصية التشابه الذاتى. أو ببساطة الفراكتال كشكل هندسى (متعرج) يمكن تقسيمه إلى أجزاء كل (على الأقل تقريبا) يعتبر جزءًا مصغراً من الكل. وقد لاحظنا أن الفراكتال لا يتقاطع مع نفسه. كما ميزنا بين فراكتالات (أشكال متشابهة ذاتيا) مضبوطة (رياضية - اصطناعية) وأخرى إحصائية موجودة فى الطبيعة أو فى بعض لوح فنية. كما قدمنا رسم أشكال هندسية متشابهة ذاتيا (رياضية ـ مضبوطة) لعدد قليل من المقاييس Scales. وفى الواقع أنه

حتى استخدام التكنولوجيا المتقدمة تعجز عن رسم (وتوضيح) شكل يبين التشابه الذاتى على مدى عدد لا نهائى من المقاييس.

كما قدمنا نبذة عن التكرار المرحلى iteration الذى يحدد مولد أو عملية... لتوليد فراكتالات مشهورة. ثم رسم هذه الفراكتالات خطوة خطوة فى التكرارات المختلفة بالنسبة لمنحنيات كوخ، بينو، سبيرنيسكى، ومنجر كما قدمنا خصائص وملامح عجيبة لهذه الفراكتالات لا يتصورها العقل كمحيط لا نهائى لفراكتال كوخ (على مثلث) لرقائق الثلج يحد مساحة محدودة، وسطح لا نهائى لفراكتال سبيرنيسكى يحد مساحة صفر، وشكل مجسم لفراكتال منجر لا نهائى حجمه صفر. كما أبرزنا الجمال الرياضى البديع لفراكتالات ساهم اظهارها تقدم الكمبيوتر وحاولنا ربط الفن الرياضى بفن الرسم المعاصر المبنى فى جوهرة على الفراكتالات لفنانين لهم أصالة فنية أو فنانيين يعتمدون على برمجيات للفراكتال بالكمبيوتر على رسم لوحهم الفنية.

وقد أثار تقديم محتوى هذا الفصل خاصية أساسية للفراكتالات وهى التشابه الذاتى. وهذا يمهد لتقديم خاصية أساسية هامة أخرى للفراكتالات فى الفصل القادم وهى البُعد الفراكتالى.

تعقيب (٣): تضامين implications وانعكاسات حول تنمية الابتكار التدريسى لمعلم الرياضيات

قدمنا فى نهاية هذا الفصل ملخصاً لمحتواه... لكن فى هذا التعقيب نشير إلى توظيف أسلوب عرض المحتوى لتنمية النواحى الإبتكارية للمعلم، المتعلم لخاصية أساسية جديدة عليهم تسهم فى نمو أفكار متشعبة للهندسة المعاصرة التى من المحتمل ألا يكون قد سمع عنها شيئا. فالعرض مُوَجَّهٌ أساساً بهدف تنمية ابتكارية المعلم التى تظهر وتنعكس فى ابتكارية تدريسه.

والآن إقرأ مرَّة أخرى هذا الفصل ليس بغرض التعرف وتعلم الأفكار والموضوعات الجديدة فيها فقط ولكن بقصد أن تتلمس كيف أن أسلوب أو شكل

عرض فكـرة أو جزء من المحتوى أثار إحـساسك وخيالك أو حـفزك على معايـشته بعقـلك ومشاعـرك بما أدى إلى إنغـماس (عميـق) دفعك علـى صنع أو إعادة صـنع (عمل) شيء أو فكرة أو شكل جديد.

وسجلها فـى مذكرات لك. ثم لاحظ بعد ذلك نمـط تدريسك ستجد أنك تـلقائيا تعـكس هذا الأسلـوب فى تدريسـك ليستـمتع تلامـيذك بتعـلم ما يثـير إحساسـهم وخيالهم وتفكيرهم ويحفزهم لعمل (صنع الرياضيات).

فتـكامل الإحـساس والخيـال مع الأفكـار مع العـمل هو مـا ينمـى ابتكـارك فى التدريس وابتكار تلاميذك فى الرياضيات.

ستجد فى المذكرات التى كتبتها تعبيرًا عن وصف ملامح أسلوب العرض لمحتوى هذا الفصل لتنمية ابتكارك التدريسى مثل:

١ ـ أسلـوبٌ العرض أسلـوبٌ جديدٌ لـم تعهـده فى أى كتاب جـامعى ـ مـدرسى ـ ثقافى ... فهو أقرب مـا يكون حديثًا من القلب لقارىء عزيز لـيكون قريبًا جدًا منه، يـرى بعينيه ويـسمع بأذنيه ويـحس بإحساسـه ويفهم بعقـله ويتأمل بتـأمله ويتخـيل بخيالـه ويشاركه فـى صنع الرياضـيات مهما كـانت جديدة ـ عـصرية غريبـة عليه. فالأسلـوب يعطى مساحـة للمشاركة بـينى وبين القارىء وجـدانيا وخياليا وعقليا وتأمليا فى كشف النقاب عن الأفكار الرياضية وفى التفتيش عن نمـاذجها وأمثـلتهـا... وفى صـنع الأشـكـال الهـندسـيـة الجديـدة.. وفى نمـو الأفكاروالأساسيات.

٢ ـ التبسـط والتباسط فى تقـديم أى جزء من المحتوى بأسالـيب متعددة. فالتـبسيط عمل إبتكارى يعوِّدك الأسلوب عليه.

٣ ـ جعل غير المألوف مألوفا (مثل تقديم خاصية التشابه الذاتى).

٤ ـ تنمية الإحساس بالطبيعة والإحساس بنفسك.

٥ ـ تـنمـية تـذوق الجـمال الـريـاضى والإحـساس بـجـمال الأشـكـال الريـاضيـة والفراكتـالات الغريبة وبجمال الـلوحات الفنية التـى باطنها فراكتالات مـنها ما يعكس الإحسـاس بإيقاعات الطبيعـة. فعمل لوحة فنية ابـتكار (ابداع)، وتذوق

جمالها نوع من الإبتكار. وعلى ذلك فالأسلوب الذى يعمل على تنمية تذوقك بالجمال الرياضى والإحساس به هو أيضا ينمى فيك نوع من الابتكار الرياضى وبالتالى الابتكار فى تقديم أى مادة رياضية لتلاميذك.

٦ ـ تنمية الدافعية للبحث والتفتيش Search عن فراكتالات فى الرياضيات وفى الطبيعة وفى جسم الإنسان وفى الفن.... فالبحث والتفتيش مرحلة هامة فى أى عمل رياضى لجمع مادة رياضية تساعد فى حل مشكلة بحثية أو إختراع وابتكار رياضى. ومن جهة أخرى يولد الميل لهواية التجميع والتصنيف (مثل هواية تجميع طوابع البريد والعملات...) هذا الهواية بدورها تؤدى إلى تنمية الحب للرياضيات. وهذا الحب (والعشق) للرياضيات هو النافذة لحب الإستطلاع الرياضى، وللاكتشاف والاختراع الرياضى للبعض.

٧ ـ تنمية الخيال والإحساس المصاحب لعملية البحث والتفتيش.

٨ ـ معايشة الرياضيين فى تجديداتهم ونمو أفكارهم الرياضية.

٩ ـ إثارة الحيوية فى صنع الفراكتالات والاستمتاع بعملية تكوينها كزهرة غريبة تتفتح رويداً رويداً.

١٠ـ إثارة الدافعية للقيام بإكمال عمل الفراكتالات المشهورة. مع تنمية الدقة والاتقان فى عملها.

١١ ـ إثارة اكتشاف واختراع ومتابعة الفكر الرياضى الأصيل. مثلا فى التجديد المستمر لفكرة الجزء الأوسط للمولد generator للفراكتالات المشهورة لكوخ، وبينو، وسيربينسكى...

١٢ ـ تنمية حب الاستطلاع المعرفى لجذور الأفكار الجديدة... مثل جذور فكرة الجزء الأوسط للمولد فى مجموعة كانتور التثليثيه.

١٣ ـ تنمية الخيال الرياضى لجعل المستحيل ممكنا من خلال الإثارة للتعرف على سطح لا نهائى مساحته صفر... وبقية خصائص الفراكتالات التى تعكس سحرها وغرائبها.

١٤ ـ تنمية التفكير الرياضى (المنطقى والشكلى) من خلال التمييز بين التشابه الذاتى المضبوط (الرياضى ـ الاصطناعى) وبين التشابه الذاتى الاحصائى. وأيضاً من خلال إرشادات لاثبات الخصائص الغريبة لبعض الفراكتالات المشهورة.

١٥ ـ استخدام أسئلة وتساؤلات، والإجابة الفورية على بعضها أو إرجاء الإجابة بقصد تحضين الفكرة الرياضية ولتوظيف الخيال والذاكرة والشعور واللاشعور فى صنع الفكرة الجديدة.

١٦ ـ الانطلاق بالفكرة الرياضية وربطها بالمجالات المختلفة (أى عمل روابط رياضية mathematical Connections).

١٧ ـ التعبير عن فكرة رياضية جديدة بأساليب مختلفة لفظية أو رسوم فى مواضع مختلفة لتوضيح الفكرة (أو المفهوم.....) ولتسهيل هضمها على مراحل.

١٨ ـ الاثارة للتأمل فى الطبيعة وفى لوحات فراكتالات مشهورة غريبة (مجموعة جوليا، مجموعة ماندلبروت...) ولوحات مستوحاه، من الفراكتالات باستخدام الكمبيوتر.

١٩ـ استخدام مداخل مختلفة للتوصل لنفس الفكرة الرياضية أو صنعها. مثل تكوين فراكتال منحنى كوخ لرقائق الثلج عن طريق المولد (وتطبيقه على قطعة مستقيمة) وعن طريق فراكتال الشجرة الرياضية وقمتها.

٢٠ ـ التشويق واثارة التفكير الرياضى بالتفاعل المستمر بإحساس صادق وفكر متجدد تلقائى خالى من أى اصطناع.

٢١ ـ محاولة للاندماج فى رحلات وجولات لاستكشاف الأفكار الرياضية وصنعها.

والآن حاول إضافة نقطاً أخرى ثم أضف أمثلة لها وللنقط السابقة... أمثلة ما تزال عالقة بذهنك ووجدانك.ثم سجلها فى مذكراتك. ثم حاول أن تعكس هذا الأسلوب فى تدريسك تدريجيا فستجد بنفسك مدى نمو مقدراتك الابتكارية فى التدريس وتعود على كتابة مذكرات فى هذا الشأن.

المراجع

١ـ چيمس جـلايك (ترجمة علـى يوسف) (٢٠٠٠): «الهيولـية تصنع علـماً جديداً» القاهـرة ـ المجلس الأعلى للثقافة.

٢ ـ أ.د/ نظـلة حسن أحـمد خضر (١٩٨٨): «حـكاية زخرفـة البلاط ولغـز الميراث» سلـسلة حكـايات وألغاز رياضية تـنمى التفكير الهندسـى والابتكارى لسن ١٠ ـ ١٥ ومشوقة لجميـع الأعمار القاهرة ـ الهيئة المصرية للكتاب.

3- Drazin, P. G (1993) "Non Linear Systems" Cambridge Univ Press.

4 - Mondelbrot, B.B & Frame, M (1999): "The Canopy and Shortest Path in a Self-Contacting Fractal Tree". The Mathematical Intelligencer Vol 21 No2 Spring (1999) New York, Springer Verlang. pp 18 - 27.

5 - Taylor, R.P (2002) : Order in Pollack Chaos" Scientific American, New York Vol 287 No - 6, December 2002. pp 84 - 89.

6 - Thamos. D.A (2002): "Modern Geametry" US - Brooks/ Cole - Thomson learning.

www.angelfive.

www.contestsk.com.

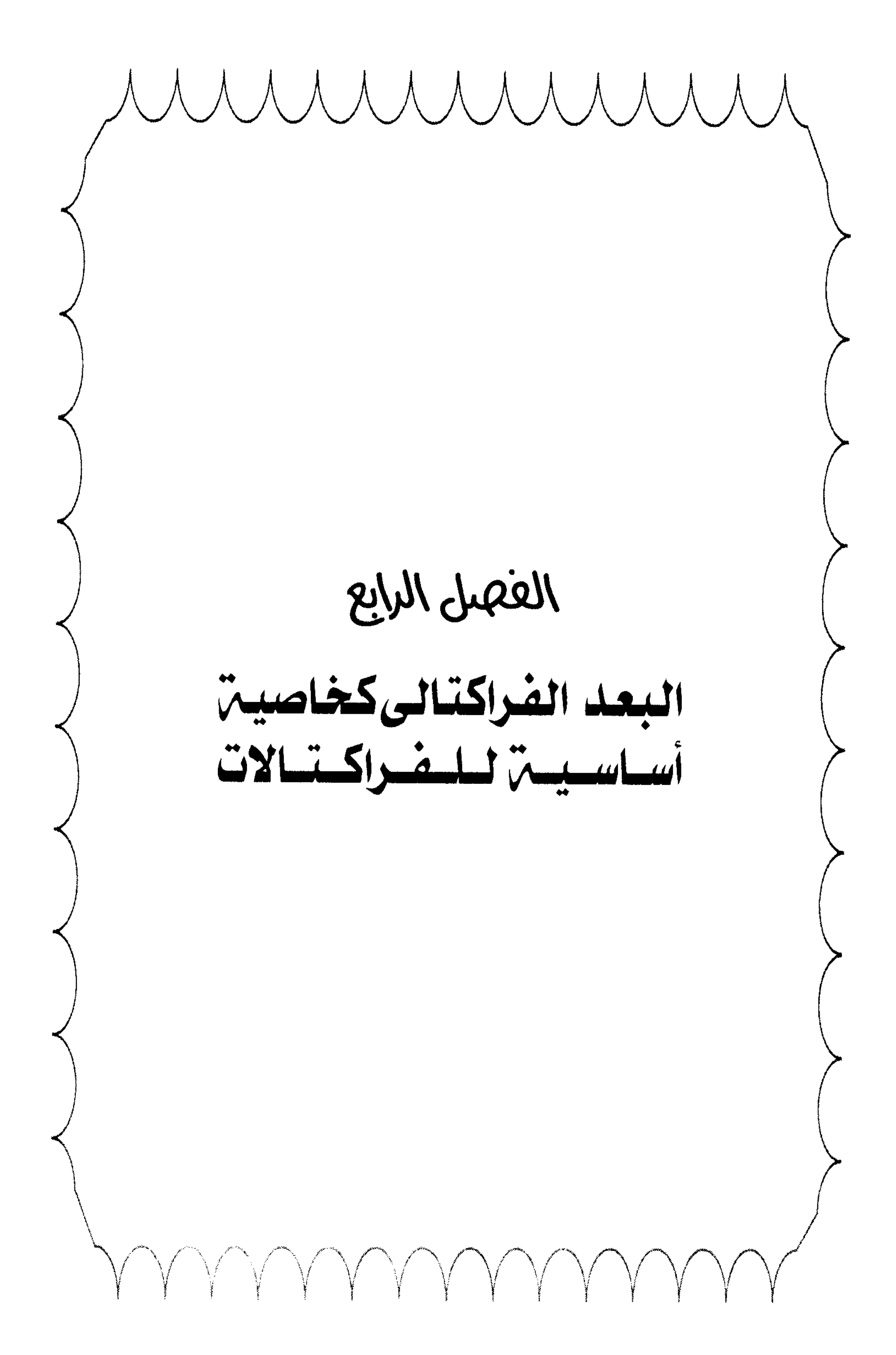
ww w. math. rice.edu.

http://www.history.mcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/Julia.html

http://www/listory/.mcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/Koch.html

http://www.history/mcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/Peano.html

http://www-history.mcs.st-and.ac.uldc/~history/Mathematicions/Sierpinski.html



الفصل الرابع

البعد الفراكتالى كخاصية أساسية للفراكتالات

الفصل الرابع

البُعد الفراكتالى كخاصية أساسية للفراكتالات

مقدمة:

توصلنا فيما سبق إلى أن الفراكتال يمكن تعريفه عن طريق أحد خواصة الرئيسية وهى التشابه الذاتى. يوجد خاصية رئيسية أخرى يمكن تعريف الفراكتال على أساسها. هذه الخاصية هى البُعد الفراكتالى Fractal dimension. وهذ البُعد يدل على مدى تعرجات الفراكتال أو على تعقيد Complexity شكله. ومن الغريب كأى خاصية للفراكتال أننا نجد أن البعد الفراكتالى يكون هو نفسه البعد الفراكتالى لأشكال فراكتال تبدو مختلفه كل الاختلاف فى مظهرها. فمثلاً البعد الفراكتالى لمنحنى كوخ لرقائق الثلج هو نفسه البعد الفراكتالى للشاطئ الإنجليزى!

وكانت المشكلة هى إختيار أنسب الأبعاد التى يعرفها ماندلبروت لتكون أكثر لياقة لتحديد بُعد فراكتال ما فى هندسته. هل هى الأبعاد الإقليدية أم الأبعاد التوپولوچية أم أبعاد قدمها هاوسدورف تعرف بأبعاد الصندوق تقوم على العد؟

وقد شغل بال ماندلبروت التوصل إلى البعد الفراكتالى عند مواجهته مشكله: إيجاد طول الشاطئ الإنجليزى. وكان ذلك قبل إعطائه إسم الفراكتال لهندسته. ولذا فإن البعد الفراكتالى كان يطلق عليه البعد الكسرى fractional dimension . ويُعد هذا شيئًا جديدًا غريبًا. فقد تعوذنا أن تكون الأبعاد أعدادًا صحيحه (موجبه) مثل: الخط المستقيم أو بالأحرى المحور له بعد واحد والمستوى له بعدان والفراغ له ثلاثة أبعاد... وهكذا بالنسبة للبعد النونى للأبعاد الأقليدية. و كذلك فى الأبعاد التوپولوچية القطعه المستقيمة (أو المنحنى البسيط) ذات بعد واحد والمربع (أو الأحرى داخليته) ذو بعدين، والمكعب (أو بالأحرى داخليته) ذو ثلاثة أبعاد... وهكذا.

ولما كان منحنى الفراكتال يختلف فى تعرجاته وتعقيده عن القطعة المستقيمة التى

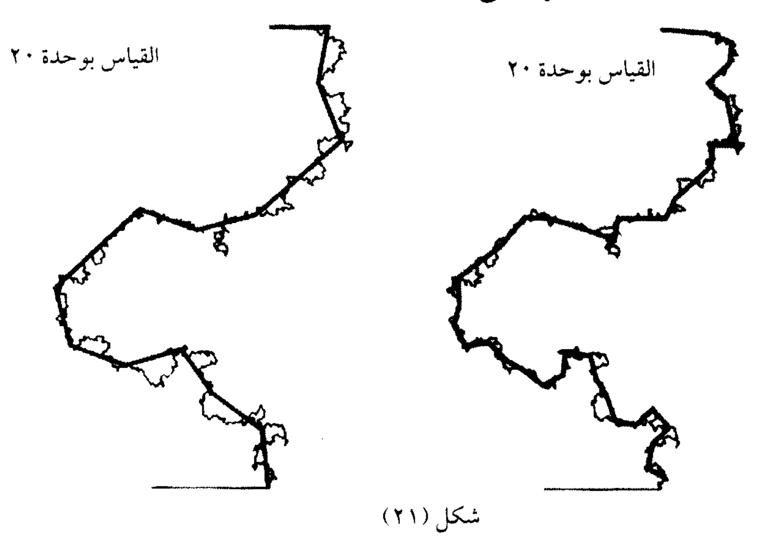
بعدها الـتوپولوچى واحد «١» فقـد جعل ذلك ماندلبروت يـستخدم بُعدًا للـفراكتال يكون أكـبر من البُـعد التوپـولوچى للـقطعة المستقيـمة. وقد دعاه ذلـك لأن يعرف الفراكتال كمجموعة set بُعدها أكبر من البعد التوپولوچى لها.

رعلى ذلك سيكـون مدخلنا فى تقديم البعـد الفراكتالى هو ماندلبـروت ومشكلة إيجاد طول الشاطئ الإنجليزى. والتمهيد إلى قاعدة إيجاد البعد الفراكتالى واشتقاقها عن طريق الأبعاد الاقليدية $R^1, R^2, R^3...R^n$ والبعد التوپولوجى d. ثم نُقدم طرقًا مختلفة لحساب البـعد الفراكتالى لبعض الفراكتالات (ومنها المشهورة) التى قدمناها فى الفصل الـسابق مع الاشارة إلى المعالجات الـرياضية الصارمة. ثم نـتعرض لأبعاد بعض فراكتالات للوحات فنية وفراكتالات فى الطبيعة (واقعيه أو احصائيه).

٤-١- ماندلبروت وطول الشاطئ الإنجليزى

نرجـع إلى رحلة مـاندلبـروت إلى الشاطـئ الإنجليزى وإفـتنانـه وانبهاره بـروعة تعرجـاته وخلجانـه، وبأمواجه المتـلاطمة التى تـخفى بعض الـتعرجات تارة وتـظهر تعرجات كـانت مختفيه تارة أخـرى. ويتحول بنظره إلـى أعلى فيتعجب مـن الغيوم الملبدة وانقشاعها.... كل هذا جعله يتشكك فى مقدرة الهندسة الإقليدية على وصف هذه الأشكـال الطبيـعية.. وأخذ يـفكر فى خواص أخـرى غير إقلـيديه نبـرزها هذه الأشكال (الأشيـاء). ثم توصل إلى أن تعرجات وخـلجان وإنكسارات الشـاطئ لها تشابه ذاتى.. وهى شـكل فراكتال. فعاد به التفـكير مرة أخرى ليخترع وسيـله لقياس طول هذا الشاطئ الغريب. وهو كأى شكل فراكتال فى الطبيعة (واقعى أو احصائى - غير مضبوط مـثل الفراكتالات الرياضية المضـبوطة). فهو متشابه علـى مدى مقاييس متعـددة. ولكون الفـراكتال شكل مـعقد ولا يتـقاطع not overlopping فـإن مـن خواصه الرئيسيه أن تركيبه structure يتغير على كل المقاييس الصغيرة. بمعنى أننا لو استخـدمنا مسطـرة طولها ٥٠ متـر كوحدة للـطول مثلاً فى قـياس الشاطئ نجـد أننا أغفلنا كـثيرًا من التعرجات والخلـجان. وإذا صغرنا الوحدة إلا ٢٠ متـر فقياس طول الشاطـئ يكون أكثـر دقه إلا أنه يهـمل أيضًا بـعض التعـرجات والخجان الأصـغر.. وهكذا أنـظر شكل (٢١). بالإضافـة إلى أن الشاطئ يـتغير بعـوامل الطبيعـه من مد وجذر وعمليات شاطئه أخرى. إلا أن الخليج سيظل خليجًا مهما تعرج.....

هذا يعطينا فكرة عن أن طول الشاطئ الإنجليزى لا نستطيع الإجابه عليه بدقه رياضية عالية. وقد دعا ذلك ماندبروت إلى أن يفكر فى إعطاء خاصية للشاطئ المعقد باختراع مفهوم البعد الفراكتالى. وكان يقصد به البعد الكسرى لأنه توصل إليه قبل سنوات عديدة من إطلاق إسم الفراكتال على هندسته. ثم استخدم البعدالفراكتالى للتمييز بين تعقيد شكل فراكتال وتعقيد أكبر لشكل فراكتال آخر. فكلما زاد التعقيد زاد البعد الفراكتالى.



شكل (٢١)

٤-٢-الأبعاد الاقليديه - البعد التوپولوچى d - بعد الصندوق D:

كما نعرف الخط المستقيم (أو بالأحرى المحور) له بعد dimension واحد، والمستوى له بعدين والفراغ الثلاثى له ثلاثة أبعاد... وهكذا الفراغ النونى له ن من الأبعاد. و هذه هى الأبعاد الإقليديه التى نعرفها وقد نشأت من تعريف اقليدس للنقطة وللمستقيم والمستوى والفراغ، ومن هندسة الإحداثيات (الهندسية التحليلية) لديكارت، على أساس أن أى نقطة على المستقيم (المحور) لها إحداثى واحد وأى نقطه على المستوى لها إحداثيين، والنقطه فى الفراغ لها ثلاثة احداثيات... وهكذا النقطه فى الفراغ النونى لها ن من الاحداثيات ونشير إلى الفراغات الإقليدية ذات الأبعاد ١، ٢، ٣.. بـ ... وR^3 وR^2 وR^1.

أما البعد التوپولوچی d فقد قدمه پوانكريه (١٩٠٥) حيث إعتبر:

أ- البعد التوپولوچى للنقطة أو لمجموعة محدودة من النقط صفر أى d=o .

ب- البعد التوپولوچى للقطعة المستقيمة (أو المنحنى المكافئ لها توپولوچيا) هو واحد أى d=1.

جـ- البعد التوپولوچى للمثلث (أبو بالأحرى سطح المثلث أو داخلية المثلث - وأى شكل يتكافئ معه توپولوچيا كالمربع - الدائرة..) فى الفراغ الاقليدى R^2 هو إثنين أى d=2.

د- البعد التوپولوچى للمكعب (داخلية المكعبه) فى الفراغ الاقليدى R^3 هو ثلاثة أى d=3 . أى أن البعد التوپولوچى للقطعة المستقيمة (قد تسمى خليه cell) فى الفراغ الإقليدى R^1 هو d=1، البعد التوپولوچى للمربع (أو بالأحرى سطح المربع أو داخليته) فى الفراغ الاقليدى R^2 هو d=2 ، البعد التوپولوچى للمكعب فى الفراغ الاقليدى R^3 هو d=3

هـ- ... وهكذا البعد التوپولوچى لما يناظر المكعب فى فراغ اقليدى أكبر من الفراغ الثلاثى (وتسمى بالمكعبات العليا hyper - cubes) يساوي بعد هذا الفراغ الإقليدى، فمثلا البعد التوپولو چى للمكعب العلوى hyper cube فى الفراغ الاقليدى الرابع R^4 هو d=4 ، البعد التوپولوچى للمكعب العلوى فى الفراغ الاقليدى النونى R^nهو d=n

كانت فكرة پوانكريه للبعد التوپولوچى مبنية على أساس القطوع cuts التى تقسم الشكل بحدوديات boundaries، بالإضافة إلى استخدام الاستنتاج الرياضى.

فإذا كان التقسيم لشكل يحدث عن طريق نقط، بإعتبار النقطه بعدها التوپولوچى صفر فيكون الشكل بُعده التوپولوچى أكبر بواحد، وإذا كان تقسيم الشكل بمنحنى بعده التوپولوچى ١ فيكون الشكل بُعده التوپولوچى أكبر بواحد من البعد التوپولوچى للمنحنى وهكذا. وعلى ذلك فإن:

أ – القطعة المستقيمه (أو أى منحنى يكافئها توپولوچيا) يمكن تقسيمها بقطوع cuts عبارة عن نقطة أو مجموعة من النقط (أى بنزع نقطه أو أكثر). وحيث أن البعد التوپولوچى للنقطة (أو مجموع النقط) صفرا فيكون البعد التوپولوچى للقطعة المستقيمه $d=1$.

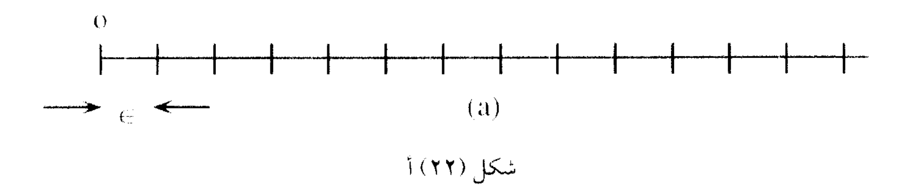
ب- السطح يمكن تقسيمه بقطوع cuts عبارة عن منحنيات بسيطة (أى بقطع المنحنيات) بعدها التوپولوچى ١ فيؤدى ذلك أن البعد التوپولوچى للسطح ٢ أى $d=2$.

جـ- المجسم يمكن تقسيمه بقطوع cuts عبارة عن أسطح بعدها التوپولوچى ٢ فيكون البعد التوپولوچى للمجسم ٣ أى $d=3$... وهكذا.

أما مجموعة كانتور التثليثيه فلا مكان لها فى الأبعاد الإقليديه ولكن البعد التوپولوچى لها فهو صفر أى $d=o$ لأنها مجموعة جزئية من R طولها صفر. وقد عمم هاوسدورف (١٩١٩) البعد التوپولوجى d للأشكال غير البسيطه بتقديم أفكار ما يسمى بُعد الصندوق D. حيث يكون البعد D ليس بالضرورة عدد صحيح فيكون $D \neq d$ للأشكال غير البسيطة (المعقده)، $D=d$ للأشكال البسيطة ويكون البعد D أقل أو يساوى البعد الاقليدى m. أى $d \leq D \leq m$.

وبُعد الصندوق يماثل تعريف البعد الذى قدمه هاوسدورف D. وهو نفسه الذى اختاره ماندبروت ليعبر عن البعد الفراكتالى D. وللتوصل إلى تعريف بعد الصندوق D دعنا نأخذ قطعة مستقيمة طولها l فى الفراغ الاقليدى ذى بعد واحد R^1. شكل (٢٢) أ. إذا أردنا أن نغطى هذه القطعة المستقيمة بمجموعة من القطع المستقيمة الصغيره (غير المتقاطعه) التى طول كل منها $\in$ فإننا نجد أن عدد هذه القطع المستقيمة الصغيرة $N(\in)$ التى تغطى القطعة المستقيمة l هو تقريبًا $\frac{l}{\in} \cong l \in^{-1}$ أى أن

$$N(\in) = l \in^{-1}$$



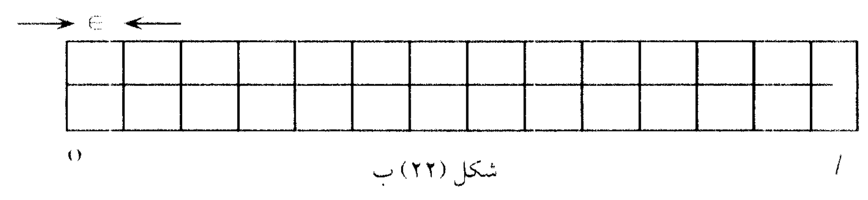
شكل (٢٢) أ

(تغطيه قطعه مستقيمه طوله l فى فراغ R^1 بقطع مستقيمه أصغر بطول ∈)

وبالطبع كلما صغر طول القطعة الصغيرة ∈ كلما زاد عددها الذى يغطى القطعة المستقيمة l . وعندما $\in \to 0$ فإن العدد للقطع المتناهيه فى الصغر تكاد تغطى تماما القطعه المستقيمة l (التى طولها l).

أى $\lim_{\in \to 0} N(\in) = l \; \in^{-1} = (\frac{l}{\in})^1$

وبالمثل إذا كانت القطعه المستقيمة التى طولها l فى الفراغ الاقليدى ذو بعدين R^2. فإنها تغطى بمربعات صغيره طول ضلع كل منها ∈ . شكل (٢٢) ب.



شكل (٢٢) ب

قطعة مستقيمة طولها l فى فراغ

الاقليدى ذى بعدين R^2 تغطى بمربعات صغيره طول ضلع كل منها ∈)

لاحظ أن عدد القطع المستقيمه الصغيرة التى طول كل منها ∈ التى تغطى القطعة المستقيمة l فى R^1 هو نفسه عدد المربعات الصغيرة التى طول ضلع كل منها ∈ وأن القطعه المستقيمة l هى شكل بسيط بُعده التوپولوچى ١، وعلى ذلك عدد المربعات الصغيرة التى طول كل منه ∈ هى $N(\in)$ وهى تساوى تقريبًا $l \; \in^{-1}$. الخلايا $N(\in)$ التى تغطى الشكل البسيط قد تكون قطعًا مستقيمة صغيرة طول كل منها ∈ أو مربعات صغيرة طول ضلع كل منها ∈ أو مكعبات صغيرة طول ضلع كل منها ∈ أو مكعبات عليا....... تبعًا للفراغ الإقليدى الموجود فيه الشكل.

أما إذا أخذنا دائرة نـصف قطرها r وحاولنا تغطيتهـا بمربعات (خلايا) طول ضلع كل منها $\in$ فإن عدد هذه المربعات $N(\in)$ يساوى تقريبًا $\frac{\pi r^2}{\in^2}$ شكل (٢٢)جـ.

وكما عرفنا البعد التوپولوچى للدائرة ٢ أى أن

$$N(\in) \cong \frac{\pi r^2}{2} \left(\frac{l}{\in}\right)^2$$

فهل الأس ٢ للـقيمة$\left(\frac{l}{\in}\right)$ هو البعد التوپولـوچى ٢ للدائرة كما كان الأس (١) للقـيمة $\left(\frac{l}{\in}\right)$ هو البعد التوپولوچى للقطعة المستقيمة فى المثال السابق..... استخدمْ أمثله أخرى لأشـكال بسيطه بأبعاد تـوپولوچيه ١، ٢، ٣... فـى الفراغـات الإقليديه R^1, R^2, R^3... وغطيـها بخلايا تـبع كل فراغ (قطـع مستقـيمة طول كل مـنها $\in$ أو مربعات طول ضلع كل منها $\in$ أو مكعبات عليا طول ضلع كل منها $\in$) ستتوصل إلى أن

$$N(\in) \cong V\left(\frac{l}{\in}\right)^d ... (1)$$

حيـث V پارامتر كان فى حالة القـطعة المستقيمة l وفى حالـة الدائرة $\pi r^2/2$ ، d البعد التوپولوچى للشكل البسيط المستخدم.

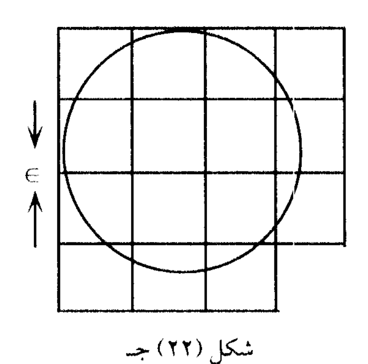
وإذا كان الشكل الـبسيط هو قطعة مستـقيمه طولها الوحدة أو مربـع طول ضلعه الوحدة أو مكعب طول ضلعه الوحدة فإن.

$$N(\in) = \left(\frac{l}{\in}\right)^d = (\in^{-1})^d ... (2)$$

بأخذ اللوغريتم للطرفين فإن البعد التوپولوچى للأشكال البسيطه d يكون

$$d = \left(\frac{\text{Log } N(\in)}{\text{Log }(\in^{-1})}\right) = \frac{\ln(\in)}{\ln(\in^{-1})} ... (3)$$ انظر ص ١٠٦ فى هذا الفصل

حيـث $N(\in)$ عدد وحدات الخلايا التى تغطـى الشكل البسيط، $\in^{-1}$ عدد القـطع المستقيمه $\in$ وتعتبر $\in$ أيضًا طول ضلع الخليه.

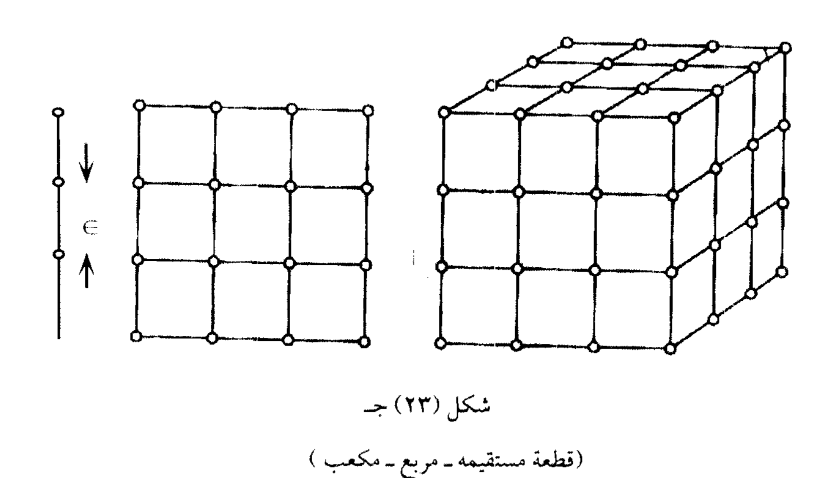


شكل (٢٢) جـ

(غطاء دائرة نصف قطرها r بعدد من

المربعات $N(\in)$ بضلع طوله ∈)

إذا لم تستطع التوصل إلى القاعدة (١)، (٢) أو تريد التحقق منها استخدم الأشكال (الأشياء) البسيطة: قطعة مستقيمه (Segment) طولها الوحدة، مربع (Square) طول ضلعه الوحدة، مكعب (cube) طول ضلعه الوحدة شكل (٢٣) مع الاستعانه بالجدول (١).



شكل (٢٣) جـ

(قطعة مستقيمه ـ مربع ـ مكعب)

Object	$\in$	d	$(1/\in)^d$
Segment	1/3	1	$[1/(1/3)]^1 = 3$
	1/4		$[1/(1/4]^1 = 4$
	1/5		$[1/(1/'5)]^1 = 5$
Square	1/3	2	$[1/(1/3)]^2 = 9$
	1/4		$[1/(1/4)]^2 = 16$
	1/5		$[1/(1/5)]^2 = 25$
Cube	1/3	3	$[1/(1/3)]^3 = 27$
	1/4		$[1/(1/4)]^3 = 64$
	1/5		$[1/(1/5)]^3 = 125$

جدول (١)

(البعد التوبولوجى d وطول القطعة المستقيمه الصغيره $\in$ وعدد الخلايا)

ولمزيد من الايضاح والإرشاد تعالى نشتق القاعدة (١) مرّه أخرى. وهى القاعدة التى تربط البعد التوبولوجى d، طول القطعة المستقيمه $\in$ التى نقسم بها طول ضلع الشكل البسيط الأصلى (سواء قطعة مستقيمة أو ضلع مربع أو مكعب أو مكعب علوى طولها الوحدة)، وعدد الخلايا التي انقسم بها الشكل البسيط الأصلى (سواء عدد قطع مستقيمه $\in$ أو مربعات صغيرة $\in^2$ أو مكعبات صغيره $\in^3$....) ونرمز لها (عدد الخلايا) بالرمز $N(\in)$.

- فى البداية نسترجع أن البعد التوبولوجى لقطعة مستقيمة فى الفراغ الإقليدى R^1 هو ١ أى d=1، البعد التوبولوجى للمربع فى مستوى (فراغ إقليدى R^2) هو d=2، البعد التوبولوجى للمكعب فى فراغ إقليدى زو ثلاثة ابعاد R^3 هو d=3... وهكذا.

وأننا نسمى القطعة المستقيمة، المربع، المكعب،... بالخلايا فى بعد واحد، بعدين، ثلاثة أبعاد،.

- بأخذ الشكل البسيط الأصلى قطعة مستقيمه طولها الوحدة ثم تقسيمها إلى قطع مستقيمة (صغيره) جزئيه طول كل منها $\frac{١}{٣}$ أى $\frac{1}{3}=\in$.فإن عدد الخلايا (القطع

المستقيمة الجزئية) المتكونه هى ٣ أى: $N(\epsilon) = (\frac{1}{\frac{1}{\epsilon}})^1 = (\frac{1}{\frac{1}{3}})^1 = 3$

وبتصغير ϵ بحيث $\frac{1}{4} = \epsilon$، وتقسيم القطعة المستقيمه الأصليه التي طولها الوحدة فإن عدد الخلايا (القطع المستقيمه الصغيرة التى طول كل منها $= \epsilon$) تصير $N(\epsilon) = (\frac{1}{\frac{1}{\epsilon}})^1 = (\frac{1}{\frac{1}{4}})^1 = 4$ للبعد التوپولوچى للقطعة المستقيمه $d=1$.

وبالمثل حاول تقسيم القطعة المستقيمه الأصلية التى طولها الوحدة إلى قطع مستقيمه أصغر طول كل منها $\frac{1}{10} = \epsilon$)، فإن عدد الخلايا (القطع المستقيمه الصغيرة المقسم لها الشكل الأصلى تصير 10.

$N(\epsilon) = (\frac{1}{\frac{1}{\epsilon}})^1 = (\frac{1}{\frac{1}{10}})^1 = 10$ للبعد التوپولوچى للقطعة المستقيمه $d=1$

- وإذا كان الشكل الأصلى مربعًا طول ضلعه الوحدة وقسمناه إلى مربعات صغيرة طول ضلع كل منها $\frac{١}{٣}$ فإنه ينتج ٩ خلايا (مربعات جزئيه طول ضلع كل منها $\frac{1}{3}$). أى:

$N(\epsilon) = (\frac{1}{\frac{1}{\epsilon}})^2 = (\frac{1}{\frac{1}{3}})^2 = ٩$ للبعد التوپولوچى للقطعة المستقيمه $d=2$

وإذا صغرنا ϵ حيث تصير $\frac{1}{4}$ فإن عدد الخلايا (المربعات الجزئية التى طول ضلع كل منها $\frac{1}{4}$) تصير ١٦. أى :

$N(\epsilon) = (\frac{1}{\frac{1}{\epsilon}})^2 = (\frac{1}{\frac{1}{4}})^2 = 16$ للبعد التوپولوچى للمربع $d=2$

وإذا صغرنا ϵ بحيث تصير $\frac{1}{10}$ فإن عدد الخلايا (المربعات الجزئية التى طول ضلع كل منها $\frac{1}{10}$) تصير ١٠٠ للبعد التوپولوچى للمربع $d=2$.

- وبالمثل بأخذ الشكل الأصلى البسيط مكعب طول ضلعه الوحدة وينقسم طول الضلع بقطع مستقيمه صغيرة جزئيه طول كل منها $\frac{1}{3} = \epsilon$ فستجد أن عدد المكعبات الصغيره الجزئية (الخلايا) المقسم إليها الشكل تصير ٢٧ مكعب أى:

$N(\in) = (\frac{1}{\frac{1}{\in}})^3 = (\frac{1}{\frac{1}{3}})^3 = 27$ للبعد التوپولوچى للمكعب d=3

وبتصغير $\in$ بحيث تصير $\frac{1}{4}$ تجد عدد الخلايا ٦٤. أى :

$N(\in) = (\frac{1}{\frac{1}{\in}})^3 = (\frac{1}{\frac{1}{4}})^3 = 64$ للبعد التوپولوچى للمكعب d=3

وبتصغير $\in$ لتصير $\frac{1}{10}$ تجد عدد الخلايا 1000

$N(\in) = (\frac{1}{\frac{1}{\in}})^3 = (\frac{1}{\frac{1}{10}})^3 = 1000$ للبعد التوپولوچى للمكعب d=3

- فى الأمثلة السابقة نلاحظ أن الأس هو البعد التوپولوچى d ومن ذلك نصل إلى التعميم:

$$N(\in) = (\frac{1}{\frac{1}{\in}})^d = (\frac{1}{\in^{-1}})^d$$

حيث $N(\in)$ عدد الخلايا (المقسم إليها الشكل الأصلى، $\in$ هى طول القطعة المستقيمه الجزئية التى تقسم ضلع الشكل الأصلى).

وهى القاعدة التى توصلنا إليها سابقًا. وبأخذ اللوغريتم للطرفين فإن $d = \log N(\in) / \log \in^{-1}$

هذه النسبه (التى توصلنا إليها من قبل) عندما تتقارب إلى قيمة ثابتة بتصغير $\in$ حتى تؤول إلى الصفر أى $\in \to o$

فإن البعد التوپولوچى عندما يطبق على شكل معقد غير بسيط يسمى بعد الصندوق Box dimension كما قام بتقديمه هاوسدورف فى (١٩١٩) ونرمز له بالرمز D.

وعلى ذلك فإن :

$$D = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{\text{Log } N(\epsilon)}{\text{Log } \epsilon^{-1}} = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{\ln N(\epsilon)}{\ln \epsilon^{-1}} \quad (5)$$

مع استبدال اللوغريتم العادى بأساس ١٠ بـاللوغاريتم الطبيعى بأساس e. وأخذ القيمه المطلقة |D| لتعبر عن بعد الصندوق.

وقد أثـارت فكرة البـعد D لها وسدورف، مختـرع هندسة الفراكتـال ماندلبروت وأختارها ليصف أشكال الفراكتالات المعقدة المتشابهة ذاتيا على أساسها.

وعلي ذلـك يمكن تعـريف (٦) البعد الفراكـتالى للشكل المتشابه ذاتيـا بأن القيمه المطلقه للنسبة $\frac{\text{Log } N(\epsilon)}{\text{Log } \epsilon^{-1}}$ (أو $\frac{\ln N(\epsilon)}{\ln (\epsilon^{-1})}$)

(حيـث $N(\epsilon)$ عدد الخلايا المقسم إليها الشكل عـلى أساس تقسيم الطول بقطع مستقيمة جزئـية طول كل منها ϵ) مع ملاحظة أن الدقه الرياضـية تستلزم أن تتقارب النسبة لقيمة ثابتة.

ونرجع إلى إشتقـاق قاعدة إيجاد البعد الفراكـتالى التى تجعلك تشعـر أنها مألوفة وتأتى ببساطه مما نألـفه فى الابعاد الإقليديه والبعد التوپولوچـى. وكما مهدنا فى هذا الفصل، القطعة المستقيمة بعدها التوپولوچى واحد أى d=1 وكذلك شكل الفراكتال (مثـل منحـنى كوخ لـرقائـق الثلـج) المتكـون من تعـرجات لقـطع مـستقـيمه بـعده التوپولوچى أيضًا يساوى واحد أى d=1 لأنه يتكافأ توپولوچيا مع القطعة المستقيمة.

ولكنك لا تـتوقع أنه باستخـدام القاعدة D للبـعد الفراكتالـى أن يكون D لـهـذا الفراكتال يساوى واحد، ولكنك تتوقع أن يكون أكبر من واحد أى D>1 وهذا الذى تأكد منه مـاندلبروت. وعلى ذلك فقد عرَّف الـفراكتال (المتشابه ذاتيا) بـإنه المجموعة التى بعدها الفراكتالى أكبر من بعدها التوپولوچى.

ومـن المشـوق أن نـعرف كـمـا ذكر درازيـن (4) أن ريـتـشـارد سون فـى سـنـة ١٩٦١فحص الشاطئ الـغربى لبريطانيا واكتشف عـمليًا أنه تقريبًا متشـابه ذاتيا على عديد من المقاييس، والـتشابه الذاتى بمعنى إحصائى.. بأن الشاطـى يبدو منشابهًا لأى

مقياس (من التصغير والتكبير magnification) إلامن ملامح يمكن معرفتها. وقد وجد رتشاردسون أن طول الساحل l يحقق العلاقة $L(\in) \approx V \in^{1-D}$

حيث اعتبر وحدة القياس كما كان متعودًا عليه فى الخرائط ما بين ١٠كم، ١٠٠٠كم أى $10\ km \leq \in \leq 1000\ km$، حيث $D = 1.25$ بالعد على الخرائط للقيم المختلفة لـ $\in$ والعدد $N = \frac{l}{\in}$ وهو عدد خطوات الطول $\in$ من نقطة إلى نقطة على الشاطئ. وكان يستخدم مساطر (أو مازوره) بالسير Wallking dividers. ووجد أن طول الشاطئ L يحقق المعادلة $L(\in) = V \in^{1-D}$ عندما يكون

$$D \simeq 1.25 \quad ، 10\ km \leq \in \leq 1000\ km$$

إلا أنه كما عرفنا بعد الصندوق (أو البعد الفراكتالى نأخذه عندما $\in \to o$ وهذا ما لم يفعله ريتشاردسون، فلم يستخدم القياسات على مقايسس أصغر من الماخوذ به للخرائط التى أمكنه الحصول عليها (مثل المتر، والميكرون أو الكميات المتناهية فى الصغر). فهل يكون ما عمله ريتشاردسون قد دفع ماندلبروت لاستخدام ما يشبه الساحل من فراكتالات مضبوطه رياضية متشابهه ذاتيًا على كل المقاييس مثل منحنى كوخ لرقائق الثلج عن طريق البعد الفراكتالى لحل مشكله طول الشاطئ الإنجليزى ؟ والآن تعال نطبق قانون البعد الفراكتالى D لايجاد أبعاد بعض الفراكتالات التى قدمناها فى الفصل السابق. وفى الواقع يوجد عدةً أساليب لإيجاد البعد الفراكتالى باستخدام هذا القانون نتعرف عليها فى البند التالى.

٤-٣- أساليب حسابيه مختلفه لإيجاد البعد الفراكتالى:

كل هذه الأساليب تعتمد على العد (كما فى بعد الصندوق) فى تطبيق قاعدة البعد الفراكتالى D ونقدم من هذه الأساليب: الطريقة التحليلية ـ طريقة استخدام الشكبه التربيعيه ـ طريقة إستخدام المسطرة.

٤-٣-١- الطريقة التحليلة فى إيجاد البعد الفراكتالى لبعض الفراكتالات ومنها المشهورة.

وهى طريقة تستخدم العد على مكونات المولد (أو العملية) التى تولد الفراكتال. فمثلا بالنسبة للمولد المطبق على قطعة مستقيمه فى التكرار n_o نأخذ القطعة

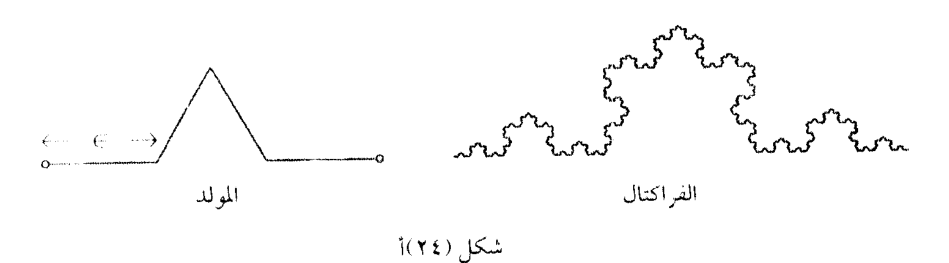
المستقيمة طولها الوحدة، $\in$ طول القطعة المستقيمة الصغيره الجزئية، التى تقسم بها القطعة المستقيمة الأصلية، عدد الخلايا $N(\in)$ هو عدد القطع المستقيمة التى طول كل منها $\in$ للمولد.

ثم نطبق القاعدة: $D= \dfrac{\text{Log } N(\in)}{\text{Log } \in^{-1}}$

وقد اتضح أن هذه الطريقة تقدم نفس قيمة D باستخدام المعالجة الرياضية الصارمة عندما $\in \rightarrow o$.

وعلى ذلك نقدم أمثلة تطبيقية لإيجاد البعد الفراكتالى لبعض الفراكتالات(D باستخدام الطريقة التحليلية التى ذكرناها على المولد ونقدم المعالجة الرياضية لبعضها:

مثال(١): البعد الفراكتالىD (لفراكتال) منحنى كوخ لرقائق الثلج (المطبق على قطعة مستقيمة) بالمولد العادى (قمته إلى أعلى).

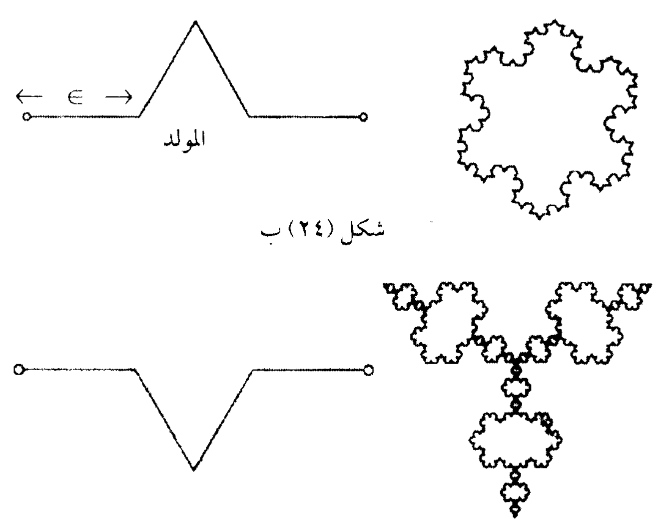


شكل (٢٤)أ

لاحظ أن $\in = \frac{1}{3}$ لأن القطعة المستقيمة التي طولها الوحدة قسمت إلى ثلاثة قطع مستقيمه متطابقة طول كل منها $\frac{1}{3}$ وفى المولد استبدلت القطعة المستقيمة فى الوسط بساقين متساويين لمثلث كل منها يساوى طوله طول $\in = \frac{1}{3}$. وعلى ذلك فإن عدد الخلايا (القطع المستقيمه المكونه للمولد) هى ٤ أى $N(\in) = 4$ وبالتعويض فى قانون البعد الفراكتالى D. فإن البعد (الفراكتال) لمنحنى رقائق الثلج (على قطعة مستقيمة):

$$D = \frac{\text{Log } N(\in)}{\text{Log } \in^{-1}} = \frac{\log 4}{\log 3} = 1.26$$

ولكون نـفس المولد يـولد فراكتـال منحنى كـوخ بتطبـيقه علـى مثلث (مـتساوى الأضلاع طول ضـلعه الوحدة) سـواءً كانت قمة المولـد إلى أعلى أو إلى أسـفل فإن الفراكتال شكل (٢٤) ب، شكل (٢٤)جـ بعد كل منهما أيضًا $D \cong 1.26$.



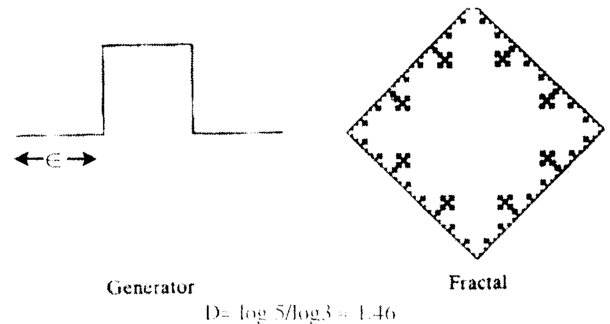
شكل (٢٤) ب

$D = \log 4/\log 3 \approx 1.26$

شكل (٢٤) جـ

لاحظ أنه بالرغم من الاختلاف الكبير فى مـلامح أو مظهر فراكتال منحنى كوخ لرقائق الـثلج فى شكل (٤) أ، ب، جـ إلا أنه لهما نفـس البعد الفراكـتالى $\cong 1.26$ الذى يعكس أن مستوى تعقدهم هو نفسه بالرغم من الاختلاف البين فى مظاهرهم.

مثال(٢): البعد الفراكتالى لفراكتال القبعةD. حاول حسابD مستعينًا بشكل(٢٥).

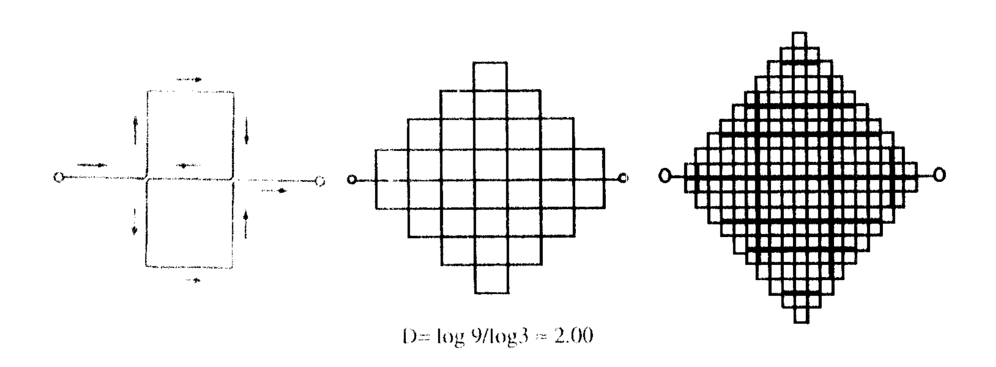


$D = \log 5/\log 3 \approx 1.46$

شكل (٢٥)

ستجد أن القطعة المستقيمة الأصلية التي طولها الوحدة استبدل الجزء الأوسط منها بثلاثة أضلاع لمربع طول كل منها $\frac{1}{3} = \epsilon$ ، وأن عدد خلايا (القطع المستقيمه) المكونه للمولد هى $N(\epsilon) = 4$. وبتطبيق القانون فإن البعد الفراكتالى $D = 1.46$

مثال(٣): البعد الفراكتالى لفراكتال منحنى پينو. ستصل بسهولة أن $\epsilon = \frac{1}{3}$، عدد الخلايا للمولد ٩ (قطع مستقيمة صغيرة جزئية طول كل منها $\frac{1}{3}$). وعلى ذلك فإن $D = \frac{\text{Log } N(\epsilon)}{\text{Log } \epsilon^{-1}} = \frac{\log 9}{\log 3} = 2.00$



شكل (٢٦)

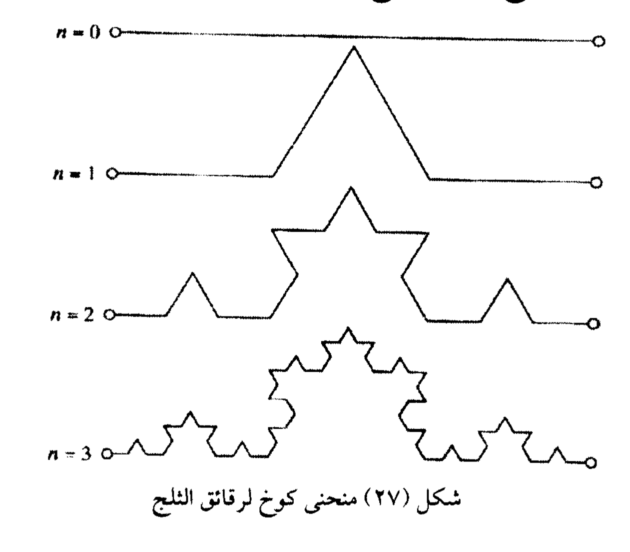
وكما ذكرنا (فراكتال) منحنى پينو هو مالئ السطح لأنه بزيادة عدد التكرارات المرحليه ن زيادة لا نهاية $n \to \infty$ يتقارب convevges الفراكتال مع كل نقط المستوى. ومن العجيب أن الفراكتال تولد من منحنى (مولد) على قطعة مستقيمة بعدها التوپولوچى $d=1$. وأن الفراكتال الناتج شكل معقد من قطع مستقيمه متناهية فى الصغر، ويختلف كل الاختلاف عن داخلية المربع فى الفراغ الإقليدى ذو بعدين R^2 والذى بعده التوپولوچى ٢ أيضًا.

.. والآن هل سألت لماذا استخدمنا المولد عند حساب البعد التوپولوچى الذى قام

بتوليده؟ أو الأحرى لماذا حسبنا عـدد الخلايا المكونه له وأخذناها $N(\in)$ والتـى طول ضلعها $\in$؟.

إذا كنت تساءلت لماذا يكـون حساب البعد الفراكتالى بهذه الطـريقة هى صحيحه فأنت متعلم ريـاضى لديه مقدرة رياضية ابتكاريه وحب اسـتطلاع، وإذا أنت تحققت من صحة هذا الـسؤال فمستقبلـك سيكون على مستـوى أعلى فى التفكيـر الرياضى والابتكارى.

والسبب فى تبسيـط الإجراءات الحسابيه باستخدام المولد يتضـح ببساطه مثلاً من مولد منحنى ڤون كوخ لرقائق الثلج المطبق على قطعة مستقيمه شكل (٢٧).



شكل (٢٧) منحنى كوخ لرقائق الثلج

لاحظ أن المـولد وهو فـى التـكرار الأول، وأن عدد الـقطع المـستقـيمـة الصغـيرة المكونه له عددها ٤ وطول كل منها $\frac{1}{3}$ أى أن

فى التكرار الأول n_1 يكون $N(\in) = 4$ عند $\in = \frac{1}{3}$

وفى التكرار الثانى n_2 يكون $N(\in) = 16 = 4^2$ عند $\in = (\frac{1}{3})^2$

وفى التكرار الثالث n_3 يكون $N(\in) = 64 = 4^3$ عند $\in = (\frac{1}{3})^3$

.... وهكذا

وفى التكرار النونى n_n يكون $N(\in) = 4^n$ عند $\in = (\frac{1}{3})^n$

ومن قانون البعد الفراكتالى

$$D = \lim_{n \to \infty} \frac{\log N(\in)}{\log \in^{-1}}$$

فإن بالنسبة لفراكتال منحنى كوخ لرقائق الثلج يكون

$$D = \lim_{n \to \infty} \frac{\log (4)^n}{\log (3)^n}$$

$$D = \lim_{n \to \infty} \frac{n \log 4}{n \log 3}$$

$$= \frac{\log 4}{\log 3}$$

كما كنا نطبق على المولد.

ـ حاول أن تتحقق من ذلك بالنسبة للمولدات الأخرى فى الأمثلة السابقة.

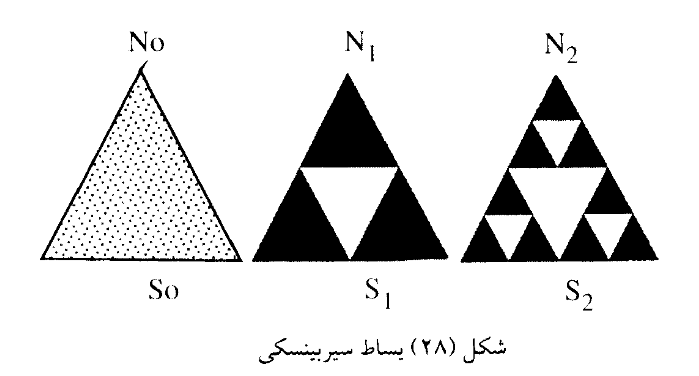
وبالمثل يمكن الإمتداد بالفكرة لحساب عدد الخلايا $N(\in)$ التى طول ضلع كل منها $\in$ علي شكل S_1 الذي يحدده التكرار الأول n_1 عند إيجاد البعد الفراكتالى كما نبين فى الأمثلة التالية . (حاول التحقق من صحة هذا الاجراء).

مثال(٤): البعد الفراكتالى لمنحنى چوان سيربينسكى (شكل ٢٨)

هنا العملية مطبقة على مثلث S_0 طول ضلعه الوحدة. عدد الخلايا على ما يناظر المولد فى التكرار الأول n_1 وهو مثلث منزوع منه المثلث الأوسط، هو ثلاثة مثلثات طول ضلع كل منها $\in = \frac{1}{2}$.

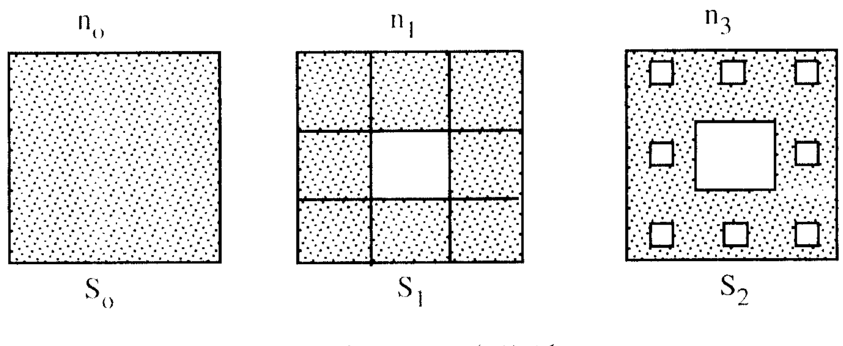
وعلى ذلك فإن:

$$D = \frac{\text{Log } N(\in)}{\text{Log } \in^{-1}} = \frac{\log (3)}{\log (2)} \approx 1.58496$$



شكل (٢٨) بساط سيربينسكى

مثال (٥): البعد الفراكتالى لبساط سيربينسكى. شكل ٢٩



شكل (٢٩) بساط سيربينسكى

العملية هنا التى يحددها التكرار الأول n_1 هو نزع المربع الأوسط من مربع S_0 طول ضلعه الوحدة . بتطبيق قانون البعد الفراكتالى على S_1 الذى يحدده التكرار الأول، نجد أن عدد الخلايا (المربعات) المكونه له هى ٨ وطول ضلع كل منها = $\frac{١}{٣}$ أى أن $N(\in) = 8$، $\in = \frac{1}{3}$ وعلى ذلك فإن:

$$D = \frac{\text{Log } N(\in)}{\text{Log } \in^{-1}} = \frac{\log(8)}{\log(3)} \cong 1.8928$$

أرجو أن تكون تحققت من صحة استخدام حساب البعد الفراكتالى بتطبيق القانون على الشكل S_1 الذى يحدده التكرار الأول.

وذلك لأنه بالنسبة (لفراكتال) چوان سيربينسكى شكل (٢٨) تجد أن

فى التكرار الأول n_1 يكون $3 = N(\in)$ عندما $\in = \frac{1}{2}$

فى التكرار الثانى n_2 يكون $3^2 = 9 = N(\in)$ عندما $\in = (\frac{1}{2})^2$

فى التكرار النون n_n يكون $3^n = N(\in)$ عندما $\in = (\frac{1}{2})^n$

$$\Leftarrow \quad D = \lim_{n\to\infty} \frac{\log 3^n}{\log 2^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n \log 3}{n \log 2} = \frac{\log 3}{\log 2}$$

وأيضًا بالنسبة لفراكتال بساط سيربينسكى شكل (٢٩).

فى التكرار الأول n_1 يكون $8 = N(\in)$ عندما $\in = \frac{1}{3}$

فى التكرار الثانى n_2 يكون $8^2 = N(\in)$ عندما $\in = (\frac{1}{3})^2$

فى التكرار النونى n_n يكون $8^n = N(\in)$ عندما $\in = (\frac{1}{3})^n$

$$\Rightarrow D = \lim_{n\to\infty} \frac{\log(8)^n}{\log (3)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n \log 8}{n \log 3} = \frac{\log 8}{\log 3}$$

مثال (٦) البعد الفراكتالى لمجموعة كانتور التثليثه. تذكر أن الشكل S_1 الـذى يحدده التكرار الأول هو قطعة مستقيمه طولها الوحدة منزوع منها الثلث الأوسط شكل (٣٠). وعلى ذلك فإن $D = \frac{\log N(\in)}{\log^{\in^{-1}}} = \frac{\log 2}{\log 3} \simeq 0.6309$

ومع ملاحظة أن عدد القطع التى تغطى الشكل S_1 هو2، وطول كل منها $\in = \frac{1}{3}$

n_o — O — S_o — 1

n_1 — O — $\frac{1}{3}$ — S_1 — $\frac{2}{3}$ — 1

شكل (٣٠)

وكما ذكرنا عندما $n \to \infty$ أى تكرار الذى يقترب من اللانهايه فإن شكل المجموعة عبارة عن مجموعة نقاط لا يوجد بها أى قطعة مستقيمه أو بالأحرى أى فترة جزئيه. وهذه المجموعة من النقط طولها صفر، وعلى ذلك فالبعد التوپولوچى

صفر. أمـا البعد الـفراكتالـى هو $D\simeq 0.63$ وهو يعـضد وجهة نـظر ماندلـبروت بأن فراكتال مجموعة كانتور التثليثية بعدها الـفراكتالي أكبر من بعدها التوپولوچى مثلها مثل أى فراكتال.

ويمكنك أيضًا التحقق من أن $D= \log 2 / \log 3$ عندما $n\to\infty$ كما قمنا فـيما سبق بالنسبة للأمثلة السابقة.

وذلك لأنه فى الـتكرار الأول n_1 يغـطى S_1 قطعيتين جزئيتين أو بالأحرى فترتين جزئيـتين (أى $N(\in)=2$) طول كل منهـا $\in = \frac{1}{3}$ وفى التكـرار الثانى n_2 ينتـج أربع فترات جزئيه طول كل منها $\in = \frac{1}{3}$ وعلى ذلك

$N(\in) = 2$ ، $\in = \frac{1}{3}$ عندما $n = 1$

$N(\in) = 2^2$ ، $\in = \frac{1}{3}$ عندما $n = 2$

$N(\in) = 2^n$ ، $\in = \frac{1}{3}$ عندما يكون التكرار n_n

$$\Rightarrow D= \lim_{n\to\infty} \frac{\log 2^n}{\log 3^n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n \log 2}{n \log 3} = \frac{\log 2}{\log 3} = \frac{\ln 2}{\ln 3}$$

عمومًا فى الطريقة التحليلية لحسـاب البعد الفراكتالى نستخدم عدد الخلايا $N(\in)$ المكونه للمـولد (أو الشكل S_1 الذى يحدده التكرار الأول) وطـول ضلع هذه الخلية $\in$، سواء أكانت الخلية قطعة مستقيمه جـزئيه أو مثلث أو مربع جزئى. كما مهدنا فى شكل (٢٢)أ السابق.

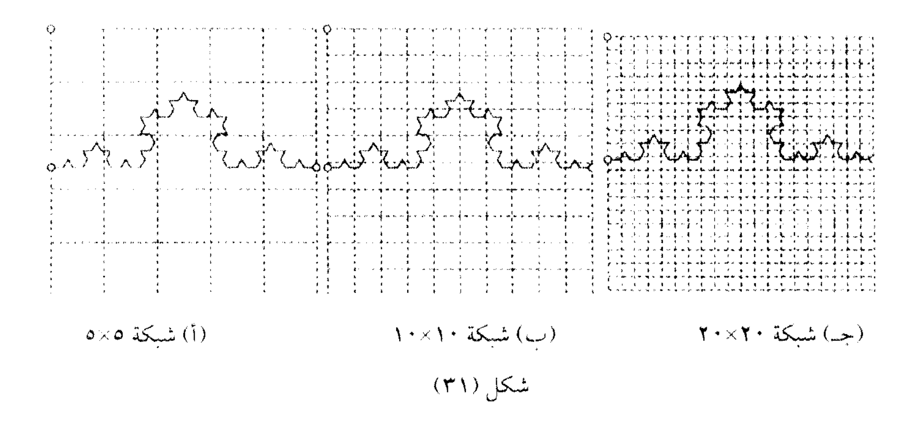
أما الطريـقة الثانية التـى نقدمها فى البـند التالى فتعـتمد علي غطاء مـن المربعات الذى مهدنا له فى شكل (٢٢) ب، جـ.

٤-٣-٢: طريقة الشبكة التربيعيه فى حساب البعد الفراكتالى.

وهى طريقة تستخدم أكثر فى التطبيقات العملية. وهى تعتمد على عد الخلايا التى

تغطى الـفراكتال $N(\in)$، والخلايا عبارة عادة عن مربعات لشـكبة تربيعيه طول ضلع كل منـها $\in$. وبتصـغير $\in$ نوجد النسبة $\frac{\log N(\in)}{\log \in^{-1}}$ عندما $\in \to 0$ لحساب الـبعد الفركتالى. وتتضح الطريقة من المثاليين التاليين.

مثال (١): إستخدام طـريقة الشبكة التربيعـيه فى حساب البعد الفراكتـالى لمنحنى (ڤون) كوخ لرقائق الثلج (المطبق على قطعة مستقيمه) . انظر شكل (٣١).



شكل (٣١)

فى الشبكة (أ) ٥× ٥ قسمنا المربع الـذى طول ضلعه الوحدة إلى ٢٥ مربع جزئى طول ضلع كـل منها $\frac{١}{٥}$ أى $\in = \frac{1}{5}$ أما فى الشـبكة (ب) ١٠×١٠ فقد قسـم المربع إلى ١٠٠ مربع جزئى طول ضلع كل مـنها $\frac{١}{١٠}$ أى $\in = \frac{1}{10}$. والشبـكة (ب) أدق من الشبكة (أ) وكذلك الشبكة (جـ).

بعد المربعات الجزئية الـتي تغطى المنحنى فى متتابعه من الشـبكات الأدق التربيعيه التى تصغـر فيها $\in$ شيئًا فشيئًا، مع امكانية استخـدام الكمبيوتر فى العد نوجد العدد المطلق الذى تتقارب إليه النسبة $\frac{\log N(\in)}{\log \in^{-1}}$ حيث $N(\in)$ عدد المربعات الـتى تغطى المنحنى التى طول ضلع كل منها $\in$.

فمثلاً بالنسبة لشكل (٣١) والشبكة (أ) ٥× ٥ يكون $N(\in) = 7$، $\in = 0.2$

وفى حالة الشكبة (ب) ١٠×١٠ يكون $N(\in)=24$، $\in = 0.1$

أما استخدمنا الشبكة الأدق ٢٠×٢٠ فيكون $N(\in)=46$، $\in = 0.05$

ونجد أنه فى حالة الشبكة (أ) ٥×٥ تكون القيمة المطلقة للنسبة $1.209 \approx \frac{\log 7}{\log 5}$

.... (ب) ١٠×١٠ تكون القيمة المطلقة للنسبة $1.38 \approx \frac{\log 24}{\log 10}$

أما إذا فى حالة الشكبة ٢٠×٢٠ تكون القيمة المطلقة للنسبة $1.27 \cong \frac{\log 46}{\log 20}$

وتتقارب هذه النسبه إلى $1.26 \approx$ وهى قيمة البعد الفراكتالى لمنحنى كوخ كما توصلنا إليها فى الطريقة التحليليه.

نلاحظ أنه كلما كانت الشكبه أدق كلما وضحت تفصيلات الفراكتال وكان عدد $N(\in)$ الذى يغطيها أدق.

مثال (٢): استخدام طريقة الشبكة التربيعيه لحساب البعد الفراكتالى لأحد الشواطئ مثل نموذج الشاطئ فى شكل (٣٢)أ.

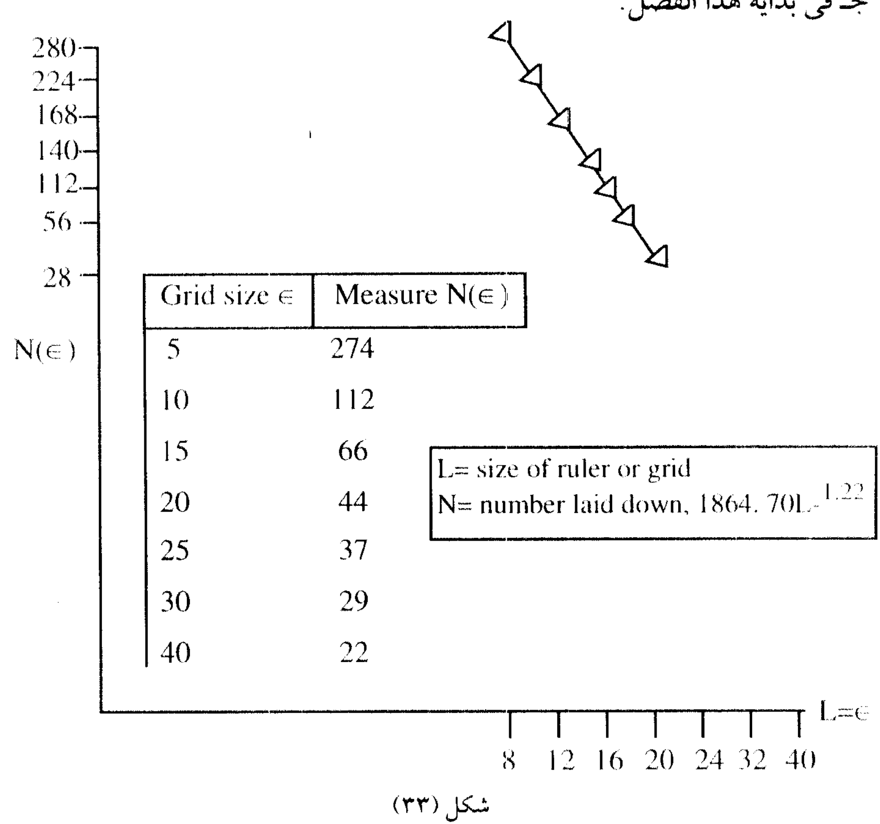


(أ) نموذج لأحد الشواطئ   (ب) عدد الخلايا التى تغطى الشاطئ ٤٤   (جـ) عدد الخلايا التى تغطى الشاطئ ١١٠

شكل (٣٢)

ولكون الشبكة التربيعيه فى الخرائط وحداتها الجزئيه مربعات طول ضلع كل منها مقياسه كبير. فإننا عندما نستخدم شبكة تربيعيه طول ضلع وحداتها الجزئيه ٢٠، ثم نعد عدد الخلايا (المربعات) التى تغطى الشاطئ بتعرجاته نجد أنها ٤٤ كما فى شكل (٣٢)ب أى $N(\in) = 44$ حيث $\in = 20$ وبتصغير الوحدات التربيعيه لتصير طول ضلعها ١٠ فإن عدد المربعات (الخلايا) الأصغر التي تغطى تفصيلات أكثر للشاطئ يزداد عددها فتصير $N(\in) = 100$ حيث $\in = 10$ كما فى شكل (٣٢) جـ - عدد الخلايا باللون الفاتح هى التي تغطى الشاطئ. ومع التوالى فى تصغير أبعاد المربعات الجزئيه للشكبه أى بتصغير $\in$ فإننا نجد أن النسبه $\log N(\in) / \log \in^{-1}$ تقترب من نسبة ثابتة 1.22 أى أن البعد الفراكتالى لهذا الشاطئ $D=1.22$. وعمليًا نستعين بالرسم البيانى للتوصل إلى المعادلة $N(\in): 1864.70\in^{-1.22}$ أنظر شكل (٣٣)[٦].

حاول أن تتحقق من هذه المعادلة عن طريق التمهيد لمعادلة (١) شكل (٢٢) ب، جـ فى بداية هذا الفصل.



Grid size ∈	Measure N(∈)
5	274
10	112
15	66
20	44
25	37
30	29
40	22

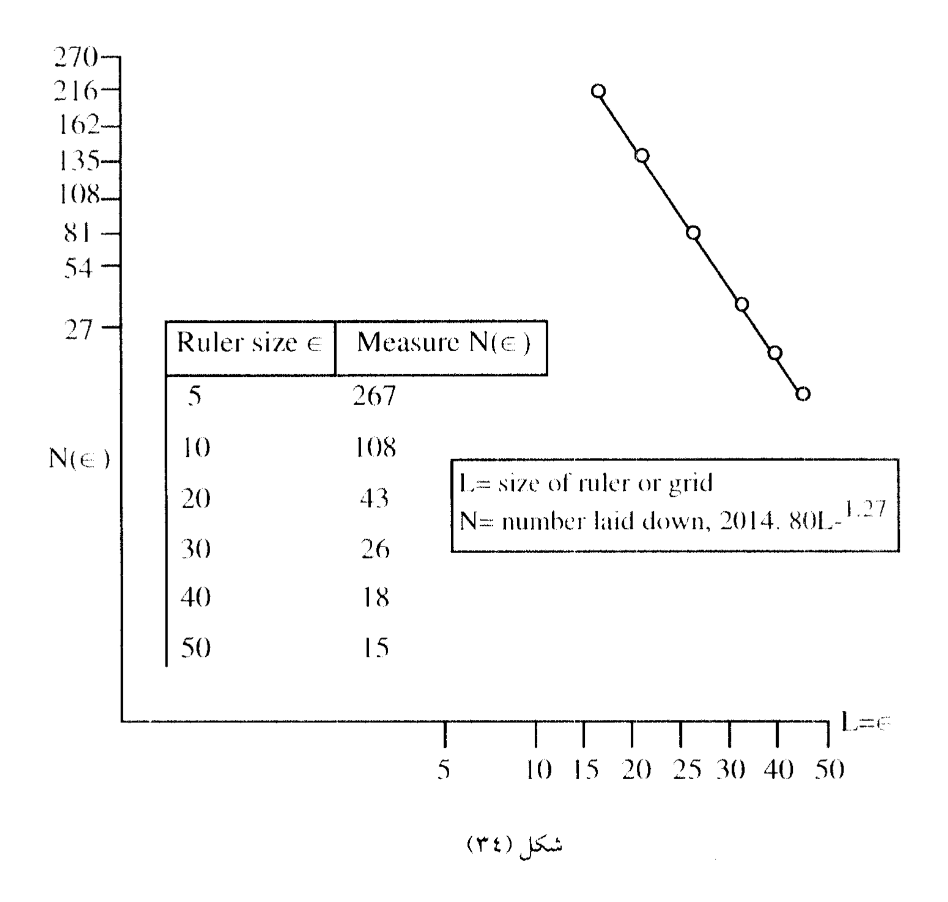
شكل (٣٣)

٤-٣-٣: طريقة المسطرة ruler لحساب البعد الفراكتالى

وهى طريقة مثلها مثل الطريقة السابقة تستخدم فى التطبيقات العمليه. وهى قريبه من الطريقة التى استخدمها ريتشارد سون (والتى ذكرناها عند التعليق على قانون (٥)) ولكنها أكثر دقه رياضيا وقد استخدمها ماندلبروت لايجاد البعد الفراكتالى للشاطئ الانجليزى لحل مشكله «ما طول هذا الشاطى؟».

حيث كان متشوقًا لمعرفة ما تقوده البيانات المتاحة المعروفه بهذا الصدد. وهى قياس طول الشاطئ بمسطره (تمثل قطعة مستقيمه ∈) عن طريق عددها الذى يغطى تقريبًا الشاطئ $N(\in)$.

وعن طريق استخدام الرسم البيانى وتصغير طول المسطرة (التى اعتبرها وحدة القياس ∈) أكثر وأكثر مع إيجاد عدد المساطر rulers التى تغطى طول الشاطئ $N(\in)$ فى كل مرة. والتمثيل البيانى لهذه البيانات ينتج شكلاً يستطيع منه التوصل إلى مستقيم أكثر لياقه Fit لهذه البيانات ـ كما ظهر فى طريقه الشبكة التربيعيه. وفى هذه الحالة كانت معادلة المستقيم $N(\in) = 2014.8\in^{-1.27}$ وبذلك يكون البعد الفراكتالى لهذا الشاطئ D=1.27 أنظر شكل (٣٤)[٦].



Ruler size ∈	Measure N(∈)
5	267
10	108
20	43
30	26
40	18
50	15

شكل (٣٤)

يتضح مما سبق أن البعد الفراكتالى لمنحنى كوخ لرقائق الثلج (بحسابه بالطريقة التحليليه أو طريقة الشبكة التربيعية) يقترب من البعد الفراكتالى للشاطئ الانجليزى (بحسابه بطريقة المسطرة بدقة رياضية أو حتى بطريقه ريتشارد سون). وأن القيمة التقريبيه لبعد الفراكتالى تدل على مدى تعقيد الفراكتال وليس على ملامحه الظاهرية أو كبره أو صغره. وقد توصلنا إلى أن البعد الفراكتالى لمنحيات الفراكتال تكون ما بين ١، ٢وهذا يجعلنا نتوقع أن البعد الفراكتالى لأسطح الفراكتال تقع ما بين ٢، ٣.

وعرفنا أنه بالنسبه للأشكال البسيطه المألوفة (مثل القطعة المستقيمه ـ المربع...) يكون بعدها التوبولوچى d مساويًا لبعدها الفراكتالى (أو بعد الصندوق) D. أما

الأشكال المعقدة مثل الفراكتال فيكون بُعدها الفراكتالى D أكبر من بعدها التوپولوچى d. وهذا ما دعا ماندلبروت إلى تعريف الفراكتال بأنه الشكل الذى بُعده الفراكتالى أكبر من بعده التوپولوچى. وفى الواقع البعد الفراكتالى يُعد مفهومًا حديثًا نسبيًا وليس جديدًا أو معاصرًا فهو يرجع إلى أفكار «هاوسدورف» فى أوائل التسعينات. ولكن الجديد فيه أنه الأكثر لياقه most fit للتعبير عن مستوى تعقد الفراكتال. ومن مزاياه فى هذا الصدد تعدد الطرق البسيطة فى حسابه.

هل للبعد الفراكتالى دلالات أخرى، هذا ما سوف نتعرض له فى البند التالى:

٤ - ٤ - الأبعاد الفراكتالية ودلالتها فى فراكتالات الطبيعه، والفن، والرياضيات

كما أشرنا سابقًا يُعد البعد الفراكتالىD خاصية فى توصيف الفراكتال حيث يعطى قيمة عدديه أو علاقة كميه لشكل النمط الملحوظ لعدّة مقاييس من التصغير والتكبير، كدالة لتعقيدات (تكسيرات) تركيبه. وبالنسبه للأشكال البسيطه (الإقليديه) فأبعادها تكون بسيطه وأعدادًا صحيحة فالقطعة المستقيمة التى لا تتضمن أى تركيب فراكتال يكون بعدها التوپولوچى ١، والمربع (سطحه) أو (داخليته) يكون بعده التوپولوچى ٢ . أما بالنسبة لشكل (نمط) منحنى الفراكتال الذى يجعل تركيبه المتكرر (المتشابه ذاتيا) يشغل حيزًا، فهذا يجعل بُعده الفراكتالى يقع ما بين ١، ٢. وكلما زاد تعقيد compexity وثراء التركيب المتكرر اقترب بُعده من ٢.

وقد وجد أنه بالنسبة لفراكتالات فى الطبيعه: مثل الأشجار ـ الجبال ـ السحب، وفى المحاكات الكمبيوتريه الرياضية، وفى لوحة پولاك «الحصاد» أن البعد الفراكتالى D لها يتراوح ما بين ٢و ١، ٥ , ١ مهما كان أصل الشكل (النمط وأى جزء فيه) فمثلاً البعد الفراكتالى للسحاب ٣ , ١، والبعد الفراكتالى للشاطئ الانجليزى ≃ ٢٦ , ١.

أما بالنسبة للوحات پولاك[٥] الفنية الأخرى التى قدمها (١٩٤٥ - ١٩٥٢) فإن بعدها الفراكتالى (التى تمت حسابها حديثًا) وُجد أنها تتراوح ما بين ٢١ , ١، ٧ , ١.

ووصل البعد الفراكتالى لأحد لوحاته ٩ ,١ . وهي لوحة دمرها پولاك بنفسه. أما بالنسبة للفراكتالات الرياضية المضبوطه لمنحنيات (أو شكل متعرج من قطع مستقيمه) فهى كما بينا فى البند السابق فإن البعد الفراكتالى لها يتراوح ما بين ٢٦ ,١، ٢ . فكما توصلنا إليه البعد الفراكتالى لمنحنى كوخ لرقائق الثلج (أو بالأحرى منحنى ڤون كوخ لرقائق الثلج) ≅ ٢٦ ,١ والبعد الفراكتالى لمنحنى سيربينسكى ≅ ٥٨ ,١، والبعد الفراكتالى لمنحنى بينو يتقارب من ٢.

وعمومًا فقد تبين أن الأفراد يفضلون الأعمال الفنية للوحات ذات بعد فراكتالى قليل أو متوسط فهى تكون مريحه لهم. أما زيادة التعقيد فى اللوحات ذات قيم بُعد فراكتالى عالى فهى تزيد الاثارة وتشد وتشغل المشاهدين بنشاط أكثر من مشاهدةّ اللوحات ذات قيم متوسطة للبعد الفراكتالى. ويصبحوا أكثر انجذابًا واهتمامًا بالفنان وإبداعه.

وكما للبعد الفراكتالى دلالة فى الفن وتذوقه، فله أيضًا أهمية فى الچيولوچيا فهو يصف انبعاجات سطح الأرض. وله أهيمة ودلالة كذلك فى علم المتيالورچى والصناعة. فقد وجد أن البعد الكسرى لسطح المعدن مهما كانت خشونته يعطى فكرة عن مدى تحلل الكتل الصخرية. فمثلاً تحلل جبل إلى جبل صخرى فى حجم السيارة يكون بعده الفراكتالى ٧ ,٢.

وعلى ذلك فالبعد الفراكتالى من الخصائص الأساسية للفراكتال التى تعطى قيمًا جمالية وقيمًا نفعيه تطبيقيه فى شتى المجالات.

تعقيب(٤): تضمينات implications وانعكاسات حول تنميه الابتكار التدريس لمعلم الرياضيات.

والآن بعد قراءتك ودراستك لهذا الفصل حاول إختيار أى جزء منه ثم فكر فى تعليق عليه أو إنعكاساتك عليه.

لعللك فطننت أننى أردت أن أدربك على إختيار فكرة أو شيء رياضى مثلما عمل ماندلبروت عند إختياره بُعد الصندوق لها وسدورف ليعبر عن البعد الفراكتالى وحسابه.

في الـواقع أردت أن استـخدم مـدخلي فـي عرض هذا الـفصـل لتنـمية الـتعـلم الاستقلالي autonomous learning كأحد أهدافي.

والتعلم الاستقلالي تكوين أو تركيـب يشمل مركبات أهمها: الاختيار choice - تحمل مسؤولية الـتعلم - التحكم - الثقة - الابتـكار. والبتالي تنمية التعـلم الاستقلالي يؤدي إلى تنمية الابتكار التدريسي لمعلم الرياضيات.

إختيارك لأي شيء ينم عن تفضيل ذاتي له ويتضمن الاختيار نواحي شعوريه ولا شعـوريه. وقد يـكون تلقـائيًا وقـد يكون بـعد تمحص ودراسـة أو تردد أو بعـد أخذ استشـاره أو رأي من الآخرين. إلا أنه فـي النهاية أنـت صاحب قرار الإختـيار سواء اختيار ملبـس أو زوجه أو كتاب أو... قراءة معينه أو دراسة معـينة، أو هواية) وذلك بحرية Freedom.

ما تخـتاره هو تفضـيل يعكـس الميل والمشاعـر والإحساس بالقـيمة. الإقتـناع بما تختاره يمـثل تزاوج الجانب العقـلي والوجداني ليـكشف السر وراء الإختيـار ليكون أكثر لياقه Fit أو ما نقوله في الرياضيات الاختيار الأمثل optimization. والواقـع أنني أفضـل التعبير الرياضـي عن عملية التوصـل إلى الأمثل optimization عـــن التعبير بمستوى الجودة أو التميز التي ابـتدأت تدخل في وصف النواحي التربوية التي تتطلع لمستوى عالي لها.

ما تخـتاره تعتز به لأنـك تضفي عليـه بعض الحياة منـك عليه، كأنه جـزء حيوي منك. الإخـتيار الأمثل يحـرك مثيرات وسلـوكيات لأعمال اسـتقلاليه تكـون مصدر الهام وإبتكار.

وعلى ذلك عملت علـى أن يكون عملية اختيار ماندلبروت لـبعد الصندوق الذي قدمه هـاوسدورف، والذي يعد حـديثًا نسبيـا، ليكون أكثـر لياقه أو بالأحـرى يكون الاختيار الأمثل للبعد الفراكتالي هو أسلوبي لتنمية استقلالية التعلم لك. أو بالأحرى للمعلم كـدافع للإبتكار التدريسي لـه وعلى ذلك فالاساليب التي ركـزت عليها من خلال عرض محتوى هذا الفصل لتنمية الابتكار التدريس للقارئ (المعلم) منها:

(١) عمليـة التعميم فى الـرياضيات، الحديثه أو العـصرية ليست فقـط الوصول إلى قانون عام ولكن إلى قـانون أعم من قانون سابق يجعله حالة خـاصة منه. فمثلاً للتـوصل إلى (أو المساعـدة على اكتشاف) الـبعد التوپـولوچى ا، مـن خـلايـا (أشكال بسيطة: قطع مستقيمه - مربعات - مكعبات.. مكعبات عليا) فى فراغ إقـليـدى مـا $R^1, R^2 \ldots R^n$ باستـخدام الأنماط العددية والـهندسية هـو أسلوب البراجماتيين الرياضيين فى اكتشاف فكرة رياضية مثلهم مثل علماء العلوم.

أما استخدام البعـد التوپولوچى ا، الذى يكون عدداً صحيحًا لـلأشكال البسيطة ليكون مصدر إلهـام لبعد الصندوق D كتعميم للبـعد التوپولوچى ا، حيـث لا يكـون البـعد D بالضرورة عدداً صـحيحا، بل فى الغالب عدداً كـسريًا، هذا هو ابتكار رياضى لها وسدورف.

وقد حاولت أن أجعلك (أيها القارئ المعلم) أن تعيش خبرة اكتشاف ا، وعملية ابتكار D.

ولعلك تتسـاءل لماذا لا يكون قانون D هو تعميم رياضى تقـليدى ولكنه يكون تعميمًا مميزًا للرياضيات الحديثة والجديدة.

وللأجابه عـلى هذا التساؤل تعـالى نسترجع أبسط الـتعميمات فى الـرياضيات الحديثة المتعلقة بالأعداد أو بالهندسة.

أ- اختراع الإنسان الـقديم أعداد العد ١، ٢، ٣... بمناظرة مجمـوعة من الحصى بمجموعة من الماشية... تم وجدها غير مناسـبه لقياس مكيال للبن. مثلاً فاخترع الأعداد الكسرية.. ثم وجد أنه للوصول مـن مكان إلى مكان لا يكفيه أن يعرف المسافه ولكنه يجب أن يعرف الاتجاه فإخترع الأعداد الموجهة...

وتعتبـر مجموعة الأعداد الصـحيحه ليست مـجرد إضافه أعداد سالبـة والصفر على أعـداد العد، فأعـداد العد تختـلف كل الاختـلاف عن الأعداد الموجـبه فى نوعها، فهى مجمـوعة جديدة تكون اعداد العد متشاكله (مـناظره) مع مجموعة

الأعداد الموجبه التى هى مجموعة جزئية من الأعداد الصحيحه فهذا هو ما نقصده بالتعميم الحديث.

أى اختراع تركيب جديد يكون التركيب القديم متشاكل مع جزء منه. ولو أن الأعداد الصحيحة تولدت من خلال أعداد العد، ولكننا اعتبرناها تعميما جديدًا، أو بالأحرى تعميمًا لأعداد العد وهكذا بالنسبة لبعض النظم العددية... فنظام الأعداد المركبه هو تركيب جديد يكون مجموعة الأعداد الحقيقة متشاكلً (مناظرا) مع مجموعة جزئية للأعداد المركبه على صورة أ+ صفر × ت أى $z = a + o \times i$. أيضًا نبعت الهندسة الآفينه من دراسة الهندسة الاقليدية ولكنها استقلت عنها لتكون الهندسة الاقليدية متشاكله (مناظره) لمجموعة جزئيه من الهندسة الآفينه، وهكذا.. تكون الهندسة الاسقاطية تعميما للهندسة الآفينية بمعنى أن الهندسية الآفنية تتشاكل مع مجموعة جزئية من الهندسة الاسقاطيه... والتوپولوچى تعميم للهندسة الاسقاطيه وهكذا...

وعلى ذلك بالرغم من أن بعد الصندوق أُشتق عن طريق البعد التوپولوچى d إلا أنه أعتبر تعميمًا جديدًا للبعد d - كما إعتبرنا نظام الاعداد الصحيحه تعميمًا جديدًا لنظام أعداد العد. أو إعتبار التوپولوچى تعميما جديدًا للهندسة الإسقاطيه...

(٢) بالنسبة لاختيار ماندلبروت لبعد الصندوق D ليحسب به البعد الفراكتالى فهو كما ذكرت يُجسد استقلالية التعلم التى حفزته إلى إيجاد البعد الفراكتالى لفراكتالات مختلفه ليتأكد من مستواه الأمثل ومستوى لياقته فى فاعلية تطبيقه فى هندسته. وكان هذا مصدراً لإلهامه ببلورة هندسته العصرية. وعلى أساس تقديره بسلامة إختياره للبعد D وتأكده من مستواه الأمثل فقد عرّف الفراكتال على أساس بعده الفراكتالى (الأكبر من بعده التوپولوچى - كما ذكرنا). وهذا ما حاولت إبرازه من خلال العرض فى هذا الفصل لتنمية استقلالية التعلم التى جعلت ماندلبروت يعزز اختياره بابتكارات ومسميات جديدة فى هندسته.

(٣) قدمت إيجاد البُعد الفراكالى باستخدام الطريقة التحليلية لفراكتالات متولدة عن طريق المولد generetor. وذلك بعد count القطع المستقيم المكونه للمولد وتحديد طول كل منها ∈، كتبسيط فى الإجراءات الرياضية ثم قدمت تساؤلات للبحث عن تفسير صحة هذه الطريقة المبسطة. وذلك لإستثارة تفكيرك الرياضى فى النواحى المنطقية كرياضى ينتمى لمدرسة الرياضيين المنطقيين. وللتغذية الراجعه feedback والتعزيز قمت بتقديم ارشاد للبرهان وفكرة عنه والبرهنة مرات متتالية متشابهة كل منها تخص تطبيق البرهان على إيجاد البعد الفراكتالى لفراكتال ما. وأيضًا لتدريبك على استخدام الصرامه الرياضية والدأبه وعدم التسليم بصحة ما تقرأة وبهذا ينمى مستوى التقويم لك وهو من المستويات العليا من التفكير. هذا من جهة ومن جهة أخرى فهذا نوع من التحقيق الذى يعتبر أحد خطوات أى اكتشاف أو إبتكار (إختراع) رياضى أنميه فيك.

(٤) تقديم البند الأخير، دلالة البعد الفراكتالى فى الفن والطبيعة لم يكن فقط بهدف معرفة الدلالة التطبيقيه لهذا المفهوم أو لعمل روابط connections فى المجالات المختلفة، ولكن لتقديم معلومات خفيفة مشوقة. وذلك بقصد تنمية الميل والحب للأفكار الرياضية الجديدة العصرية، من جهة، ومن جهة أخرى لتعويدك أو تشجيعك على عمل إجراء مماثل للترويح عن النشاط العقلى بعد المجهود العقلى المصاحب للأعمال الرياضية الصارمة (المنطقية) أو فى استيعاب الأفكار الجديدة على تلاميذك.

- أما عن التحبيب فى الأفكار الرياضية فهو يأتى عن طريق أن يكون لها أثر فى القلب. أو بالأحرى أثر يزين القلب كما تُزين السماء بزينة الكواكب ويحضرنى فى هذا الصدد قوله سبحانه وتعالى ﴿..حبب إليكمُ الإيمان وزينهُ فى قلوبكم..﴾ ﴿إنَّا زيَّنَّا السَّماء الدُّنيا بزينة الكواكب﴾.

والآن حاول أن تزيد عن النقاط السابقة نقاطًا أخرى مع كتابة انعكاساتك عنها فى مذكراتك. ولاحظ العائد على تدريسك الابتكارى منها.

المراجع

١ - جيمس كلايك (ترجمة على يوسف) (٢٠٠٠): «الهيولية تصنع علمًا جديدًا» - القاهرة - المجلس الأعلى للثقافة.

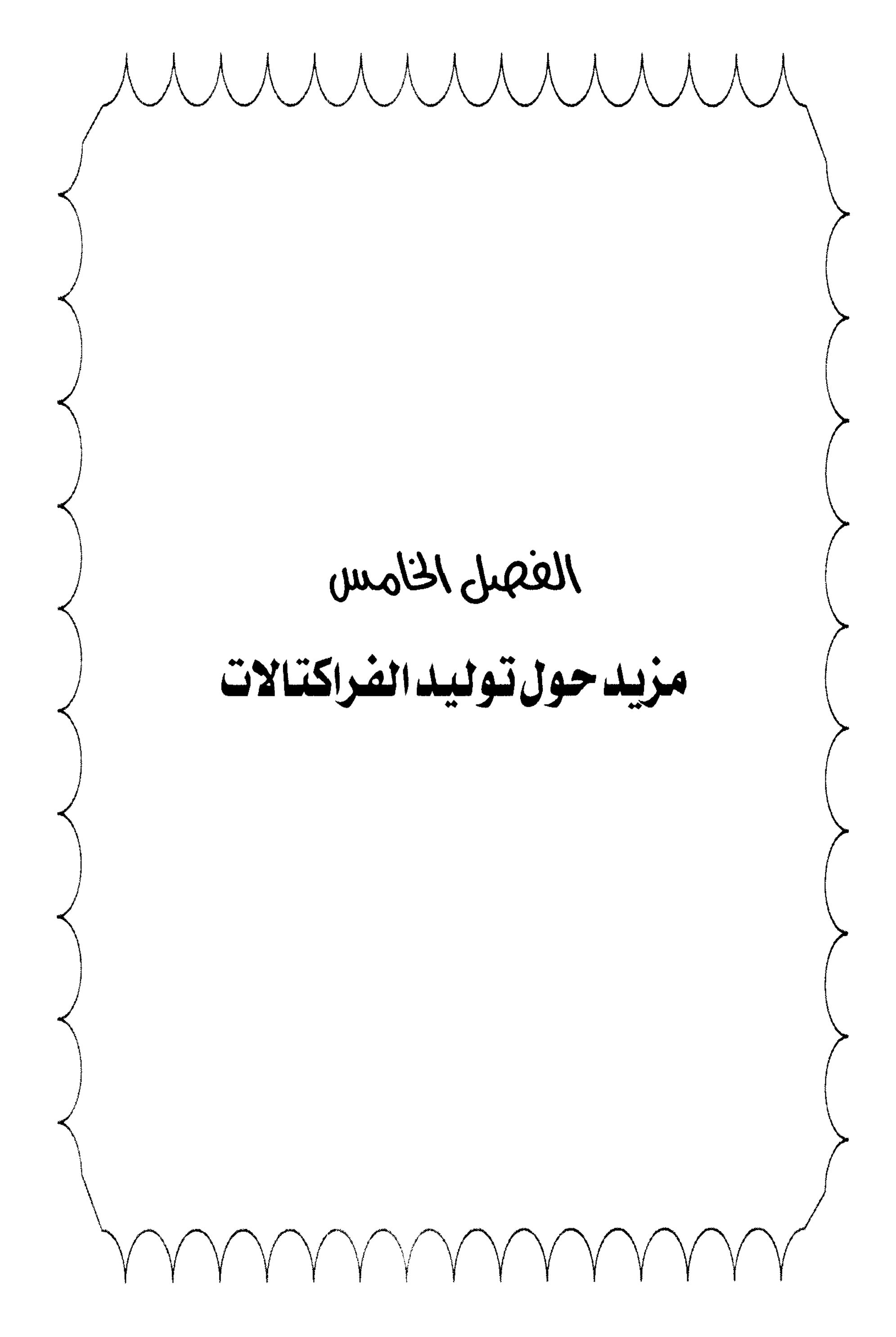
٢- أ.د/ نظله حسن أحمد خضر (٢٠٠١): «أصول تدريس الرياضيات» - القاهرة - عالم الكتب. ط/١٠.

٣- أ.د/ نظله حسن أحمد خضر (١٩٨٤): «دراسات تربوية رائدة فى الرياضيات» - القاهرة - عالم الكتب.

4- Drazin, p.G (1993) "Non linear systems" cambridge Univ press p 130, chap 4.

5- Taylor, R.P (2000). "Order in pollacks chaos". Scientific American - Newyork - Uol 287 No 6, Decembr zooz.

6- Thomas, D.A (2002): "Modern. Geometry" Us - Brooks/ cok - Thomson learning.



الفصل الخامس

مزيد حول توليد الفراكتالات

الفصل الخامس

مزيد حول توليد الفراكتالات

مقدمة:

رأينا فى الفصل الثالث إمكانية توليد فراكتالات رياضية (مضبوطه) عن طريق المولد generator بالتكرار المرحلى لتعاقب قطع مستقيمه بأسلوب معين... مثل بعض الفراكتالات المشهورة مثل فراكتال كوخ لرقائق الثلج، منحنى بينو.

كما رأينا فراكتالات مولدّه عن طريق عملية تحويل هندسى يحددها التكرار المرحلى كما فى حالة فراكتال چوان سيربينسكى وبساط سيربينسكى. كما أشرنا إلى مجموعة من التحويلات الهندسيه عند توليد فراكتال شجرة رياضيه - قمتها أيضًا يولد فراكتال منحنى كوخ لرقائق الثلج. نحاول فى هذا الفصل إلقاء مزيدًا من الضوء على هذه المجموعة من التحويلات الهندسية والتى تسمى بأنظمة الدوال المتكررة مرحليًا (Iterated function systems (IFS وتطبيقها فى توليد بعض فراكتالات مشهورة وفراكتالات تحاكى فراكتالات الطبيعه. وفى الواقع تقع الأهمية التطبيقيه التى تعكس النواحى النفعيه لأنظمة الدوال المتكررة مرحليًا (IFS) فى استخدامها لعمل المناظر الطبيعيه فى خلفيات أفلام الكارتون وفى محاكاة الظواهر الطبيعية التى تقتصد بصورة كبيرة جدًا التخزين فى ذاكرة الكمبيوتر والتى يستحيل إيجاد مكان لتخزينها فى حالة تسجيل الظواهر الطبيعية.

كما نشير إلى فراكتالات تسمى الجاذب الغريب Strange attractor يرتبط تكوينها بالهيولية (أو جوازا الفوضى) chaos- حيث يرتبط فيها النظام واللانظام. فنقدم نبذة عن أشهر وأول جاذب غريب اكتشفه لورنز معروف بإسمه مرتبط تكوينه بتصرفات (ديناميكيات) حلول معادلات تفاضيلية، كما نشير إلى توليد أشهر

وأجمل وأعقد فراكتال يعتبر أيضًا جاذب غـريب. وهو فراكتال مجموعة ماندلبروت عن طريق تصرفات دالة تربيعية مركبة من الـدرجة الثانية توصل إليها ماندلبروت من استثارته ودراسته لمجموعات چوليا. ثم نقـدم فراكتالات متولدة من استخدام التكرار المرحلى فى حل معـادلات مركبة (فى المستوى المركب) من الدرجة الـثالثة والخامسة لها طـابع جمالى فـريد. ثم نختـتم الفصل بـأعمال خفيـفة لتجديـد النشاط العـقلى والترويح العقلى تخص فراكتالات فـنية للفنان المهندس إيشر Escher وأخرى نـاتجه من تكشيلات تستخدم فى ملأ سطح ما (التبليط Tiling).

٥-١- توليد فراكتالات عن طريق أنظمه الدوال المتكررة مرحليا (IFS).

لما كان مفهوم التشابه الذاتى للفراكتال يتضمن التصغير (أو التكبير) على مقاييس Scales متعددة، فهذا يوحى باستخدام تحويلات هنـدسيه تقوم بالتصغير، مثل تحويل التشابه (بمركز معين ومعامل تكبير أو تصغير magnification).

تحويل التشابه الذى يقوم بالتصغير (بمعامل $r<1$) ينتمى لمجموعـة من التحويلات الهنـدسية أو الدوال تسـمى دوال إنكمـاشية أو انقبـاضية contraction mappings. وعنـد تطبيـقها تكـون أى مسافة بـين نقطـتين أقل من المـسافة الأصلـية أو تساويـها بالـضرب فى كسـر بين ٠، ١). قد تـسمى الـدالة الإنكمـاشية بـالتحـويل الهنـدسى (التـشابه بمعـامل تصغـير) dialation ونـرمـز لـه D. إذا أخذنـا دالة إنكـماشـية f واستخدمنا التكرار المـرحلى، فقيمة الدالة $f(x)$ فى التكـرار المرحلى الأول n_1 تصـير الداخل فى التـكرار المرحلى التالى الـذى ينتج $ff(x)$...وهكذا تـسمى قيم الـدالة فى التكرارات المرحلية $f(x), ff(x), fff(x)....$ بقيم التكرار المرحلية iterates.

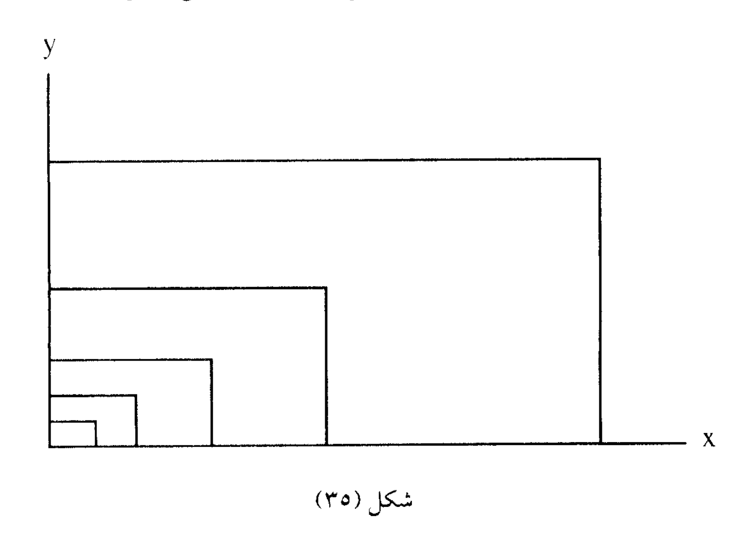
ويمكن استخدام دالة انقباضية (انكماشية) واحدة أو نظام من عدّة دوال إنكماشية يحددها التكرار المرحلى فى توليد فراكتالات كما يتضح من الأمثلة التالية:

مثال ١: بـأخذ المستـطيل فى الربـع الأول (شكل٣٥)، وأخذ الـدالة الانكمـاشية (التحـويل الهندسى) تـشابه مركزه نقـطة الأصل ومعامـله $\frac{١}{٢}$ الذى يحول النـقطة

(س، ص،١) إلى النقطة ($\frac{1}{٢}$ س، $\frac{1}{٢}$ ص،١). أى التحويل الهندسى (الخطى) الذى مصفوفته.

$$D=\begin{bmatrix} .5 & 0 & 0 \\ 0 & .5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- لاحظ البعد الثالث ١ لاعتبار التحويل الهندسى تحويل آفينى.



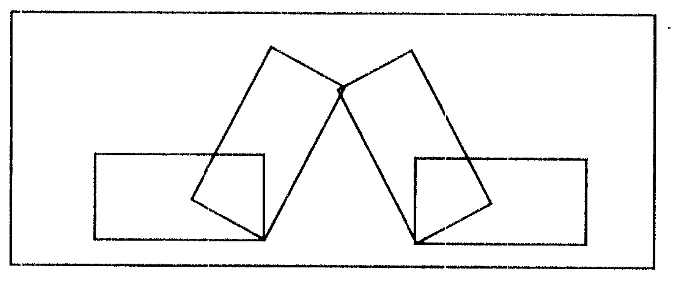
شكل (٣٥)

هنا التكرارات المرحلية التى كونت المستطيلات تبين التكرارات المرحلية لنظام دوال مرحلية التكرار IFS. ونلاحظ أنه فى التكرار المرحلى الأول نتج مستطيل أصغر طوله $\frac{1}{٢}$ المستطيل الأصلى الكبير وعرضه $\frac{1}{٢}$ عرض المستطيل الأصلى. ثم أخذنا هذا الناتج (الخارج) output كداخل input فى التكرار المرحلى الثانى لينتج مستطيل أصغر بعديه نصف بعدى المستطيل الخارج فى التكرار الأول... وهكذا كل مستطيل أصغر هو صورة للمستطيل الأكبر منه بنفس الدالة (أو التحويل الهندسى) الانكماشية D.

أى أن الشكل (٣٥) نتج من التكرار المرحلى للدالة D أربعة مرات بدءاً بأكبر مستطيل (S_0) نبتدأ به كما كنا نفعل باستخدام المولد بالفصل الثالث.

مثال ٢: تأمل شكل (٣٦) أ. المستطيل الكبير أصبح فى التكرار المرحلى الأول أربع مستطيلات أصغر. فهل يمكنك تخمين كم تحويل هندسى (أو دالة انكماشية)

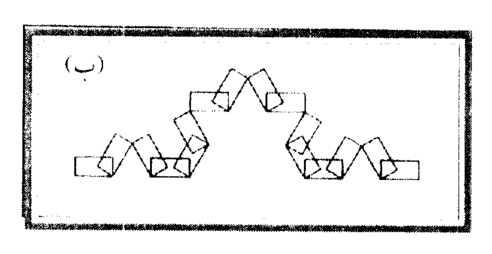
استخدم؟ وهل يمكنك أن تتصور الشكل الذى يتكون عندما يقترب التكرار المرحلى إلى ∞ ؟.

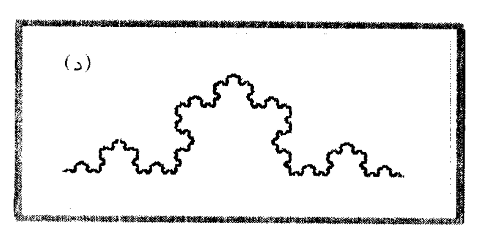


شكل (٣٥) أ

التخمين الصائب هو استخدام أربعة تحويلات هندسية (آفينية - خطية) أو دوال انكماشية. كل تحويل يحول المستطيل الكبير (كداخل input) إلى أحد المستطيلات الأصغر (كخارج output). أى أن كل مستطيل صغير من المستطيلات الأربعة هو صورة للمستطيل الكبير تحت أحد التحويلات المختلفة وكل التحويلات الأربع تطبق مع بعض فى كل تكرار.

شكل (٣٥)ب، جـ، د يبين التكرارات المتعاقبة (الثانية والثالثة والرابعة n_2, n_3, n_4) فى التكرار الأول (٣٥)أ نتج أربعة مستطيلات، وفى التكرار الثانى نتج ١٢ مستطيلاً أصغر... وهكذا نجد أنه كلما كبر التكرار كبراً كبيراً كلما اقتربنا من شكل فراكتال منحنى كوخ لرقائق الثلج.





شكل (٣٥) ب ، جـ ، د

أى أن نظام الدوال المتكررة مرحلياً IFSيحتوى على أربعة دوال انكماشية (أو تحويلات هندسية خطية(آفينية)) تُطبق مع بعضها فى كل تكرار مرحلى.

وهذا يذكرنا أيضا بالتكرارات المرحلية والمولد فى الفصل الثالث.

عموما أرجو أن يكون تخمينك صائباً فى التوصل إلى عدد التحويلات المستخدمة والتنبؤ بالتوصل إلى منحنى كوخ لرقائق الثلج عن طريقها.

والواقع أنه يمكن توليد عديد من الفراكتالات (المضبوطة) عن طريق نظم الدوال المتكررة مرحليا IFS. وهنا نركز أن تكون مجموعة الدوال هنا هى دوال أو تحويلات هندسية) انكماشية وخطية (آفينية) ـ بمعنى أن تكون صور القطع المستقيمة أصغر وأيضاً مستقيمة.

والآن إذا كان لديك فكرة عمل برامج كمبيوترية بلغات سهلة فنجد أن شكل (٣٥) يمكن إنتاجه بعمل برنامج بلغة اللوجو يحتوى على تقارير قليلة تحدد التطبيق النظامى للأربعة دوال (تحويلات هندسية) فى IFS لكل تكرار مرحلى. ونتساءل هل يكون نظام الدوال المتكررة مرحليا IFS لتوليد فراكتالات تحاكى فراكتالات الطبيعة بهذا الأسلوب النظامى فى تطبيق مجموعة دواله؟ هذا ما سوف نعرف إجابته فى البند التالى.

٥-٢: توليد فراكتالات (تحاكى فراكتالات الطبيعة) عن طريق IFS

تعال نتذكر عند رش برادة حديد على سطح زجاجى أفقى عشوائيا تجد البرادة فى أوضاع غير منظمة (ولا نظامية). وعند وضع مغناطيس أسفل السطح نجد البرادة تبدأ فى تنظيم نفسها بالشكل النظامى الذى نعرفه (ويمثل خطوط القوى المغناطيسية). بالمثل فى توليد الفراكتالات التى تحاكى فراكتالات الطبيعة بالكمبيوتر نجد أنه يظهر على الشاشة رش من النقط العشوائية اللانظامية ثم بالتدريج يبرز من خلالها شكل معين يتضح بالتدريج.. هنا لا يوجد مغناطيس كما فى حالة برادة الحديد، ولكن مؤثرات أو نظام من الدوال المتكررة مرحليا IFS ينتج أشكال فراكتال من بين نقط لا نظام فيها.

عملية وجود نظام من بين اللانظام أو ارتباط النظام باللانظام هو عملية للهيوليه (أو جوازًا الفوضى) Chaos.

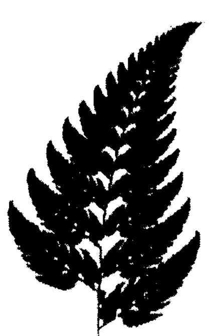
وهذا الأسلوب فى تكوين الفراكتال يختلف عن الأسلوب السابق لتكوين الفراكتال الرياضى المضبوط (فى مثال ١ ، ٢) الذى يبدأ بشكل نظامى ثم يتحول إلى شكل آخر يصير أدق وأدق حتى يقترب من الفراكتال. أما هنا فالفراكتال يبرز من بين نقط عشوائيه ويتضح شيئًا فشيئًا. وهذا يدفعنا أن نتوقع أن يكون تطبيق الدوال فى نظام الدوال المتكررة مرحليًا بأسلوب غير نظامى أو بالأحرى بطريقة عشوائية لتوليد فراكتالات تحاكى الطبيعه. وأن استخدام الكمبيوتر لإظهارها يستلزم برمجيات للهيولية (الفوضى) chaos. وهذا ما يتضح بعد المثالين التاليين.

مثال (٣): يمكن توليد الفراكتال الممثل لريشة طائر شكل (٣٦) عن طريق نظام الدوال المرحلية التكرار IFS المتكون من أربعة دوال انكماشية (تحويلات هندسية آفينية خطيه) dialation مصفوفاتها:

$$\text{Map 1}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & .16 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{Map 2}=\begin{bmatrix} .85 & .04 & 0 \\ .04 & .85 & 1.6 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Map 3}=\begin{bmatrix} .20 & -.26 & 0 \\ .23 & .22 & 1.6 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{Map 4}=\begin{bmatrix} -.15 & -.28 & 0 \\ .26 & .24 & .44 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

مع استخدام برمجيه هيوليه Chaos

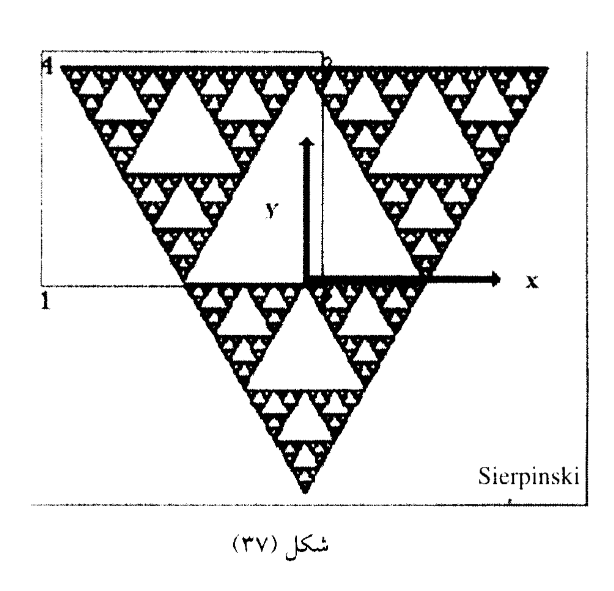


شكل (٣٦)

هذه الـدوال الأربعة تطـبق دفعة واحـدة ولكن الاختـيار لكل دالـه يكون إختـيار عشوائى.

مثال (٤) يمكــن توليد فراكتــال چوان سيربينســكى (شكل ٣٧) أيضًا مــن اختيار عشوائى لـلدوال الثلاثة فى نـظام دوال مرحلية الـتكرار IFS بالاسـتعانه بـبرمجـيه الهيوليه chaos مصفوفات الدوال الثلاثة:

$$\text{Map 1}=\begin{bmatrix} .5 & .0 & -1 \\ 0 & .5 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{Map 2}=\begin{bmatrix} .5 & .0 & 1 \\ 0 & .5 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{Map 3}=\begin{bmatrix} .5 & .0 & 1 \\ 0 & .5 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



شكل (٣٧)

ويتضح التطبيــق العشوائى للدوال فى IFS من الإجراءات (الخوارزميات) التالية التى تستخدم فى تكوين (فراكتال) چوان سيربينسكى شكل (٣٧).

١ - كنقطة ابتدائيه نختار عشوائيا مركز أحد هذه الدوال ونمثلها فى المستوى.

٢ - نختار عشوائيا أحد هذه الدوال الثلاثة ونطبقها على النقطة الابتدائية لإنتاج النقطة الثانية.

٣- نختار عشوائيا أحد هذه الدوال الثلاثة ونطبقها على النقطه الثانية لإنتاج النقطة الثالثة.

٤- نختار عشوائيا أحد هذه الدوال الثلاثة ونطبقها على النقطة الثالثة لإنتاج النقطة الرابعة.

٥- الاستمرار فى التكرار المرحلى حتى يوجد نقط كافية (لصور النقط بهذه الدوال) حتى تظهر ملامح الفراكتال.

ومثل هذه الإجراءات (بالنسبة للاربع دوال للنظام IFS فى المثال (٣) لتوليد الريشة. وعمومًا توليد شكل من خلال اللانظام (أو بالأحرى عن طريق عملية الهيولية chaos) فإننا نسمى هذا الشكل الناتج بالجاذب attractor. عندما يكون الشكل بسيط اقليدى.. كمربع أو نقطة مثلاً....

أما إذا كان شكل الجاذب هو فراكتال (أو شكل غير اقليدى) فإننا نسميه بالجاذب الغريب strange attractor.

وعلى ذلك فالفراكتالات التى تولدت فى المثالية السابقين عن طريق عمليات الهيولية (التى يرتبط فيها النظام مع اللاتظام) chaos للريشة أو مثلث جوان سيربينسكى يُسمى كل منها جاذب غريب strange attractor. والواقع أنه إذا كانت كل دالة فى IFS هى دالة إنكماشيه فإن الجاذب الغريب يكون فراكتال كما فى المثالين السابقين عمومًا عندما يتولد الجاذب الغريب بواسطة الكمبيوتر فإنه يظهر على الشاشة فى البداية رش spray من النقط العشوائية ثم يبرز تدريجيا من خلالها الفراكتال (أى الجاذب الغريب). فالجاذب الغريب شكل يصف السلوك طويل المدى لنظام هيولولى (أبو بالأحرى فوضوى) chaotic.

ولعـل أول جاذب غريب اكـتشف منـذ مدة قبل اخـتراع هندسـة الفراكتـال كان جاذب لورنز Lorenz attractor، نقدمه فى البند التالى.

٥-٣- جاذب لورنز Lorenz:

ابتدأ إكتشاف الجاذب الغريب فى الستينيات على يد عالم الأرصاد الجويه mete-orologist إدوارد لـورنـز Edward Lorenz. وقد كان عاشـقًا للرياضيـات ومغرمًا بالألغاز الريـاضية والتحدى لحلها. وقد اكـتشف فى عمله أن الطقس لـغزًا أعقد من كل ما واجهه من الغاز رياضية. كانت المشكلـة هى التنبؤ بالطقس، حيث كان علماء الطقس يمكنهم التنبؤ به لعدّة أيام فقط وليس لفترات طويله، ولكى يجيب لورنز على مشكلة لماذا يكون الطقس غير قابل للتنبؤ وضع إثنتا عشرة معادلة غير خطية كنموذج رياضى للطقس تتضمن الحرارة ونسبة الـرطوبة سرعة الرياح.. ثم بسط النموذج إلى ثلاثة معـادلات تفاضيله. وقد كان مـتأكدًا أن نموذجه (لتيارات) الحـمل سوف يؤدى إلى إمكانيته التنبؤ طويل المدى للطقـس. وأدخل معادلاته فى الكمبيوتر. ثم بالتكرار المرحلى أدخل مخـرجات الدورة السابقة؛ فإذا بالنـتائج تختلف إختلافًا كـبيرًا، فكان هذه لغزًا محيرًا له.

إذ كـيف يـكون الاخـتلاف الـطفـيـف جدًا فـى المدخـلات يؤدى إلـي كل هـذا الاختلاف الخطير.

وقدم لورنز ١٩٦٣ تلك الظاهرة بمسمى الحساسية للأحوال الابتدائية Sensitivty to initial conditions، وهى تظهر عندما يُحدثُ تغيير صغير جدًا فى ظرف (حالة) ما إلى تغـيير كبير لا يمكن الـتبؤ به. وهذه الظاهرة تـعرف بظاهرة الفراشة فـى نظرية الهيولية (أو جوازًا الفوضى) chaos. وظاهرة الفراشة مؤداها أن إهتزاز جناح فراشة يعمل إضطرابًـا طفيفًا فى الهواء يمكن أن يـتضاعف تضاعفًا هائلاً عـلى مدى الوقت والمكان إلى الحد الذى يحدث عاصفة فظيعة فى مكان للجانب الآخر فى هذا العالم. هذا الـلانظـام disorder الناتج كان الشـرارة فى خلق نظرية الهـيولية chaos الـتـى استطاعـت تفسير ظـواهر طبيعيه كان يظن أنها فوضى أو عشوائـية، ولكنها من حالة

النظام إلى اللانظام لأسباب تتناولها النظرية بالتحليل على أساس أن كل فوضى chaos لا نظام ولكن ليس لكل لا نظام فوضى.

وبنظرية الهيولية حدثت ثورة علمية جديدة جعلت من النظرية النسبية نظرية تقليديه، ولها تطبيقات فى تقدم معظم العلوم والتكنولوچيا. ومن المشوق أن جيمس جلايك فى كتابه «الهيولية تصنع علمًا جديدًا (١٩٨٧)» قدم مقولة شعرية قديمه فى مقدمته تقول:

For the want of a nail the shoe was lost,
For the want of a shoe the horse was lost,
For the want of a horse the rider was lost,
For the want of a rider the battle was lost,
For the want of a battle the kingdom was lost
And all for the want of a horseshoe - nail.

وهى تشير إلى أنه بسبب ضياع مسمار واحد فقط تحدث أحداث تؤدى إلى أن كل المملكه (والبلد) تنهار فى معركة تخسرها وذلك للتمهيد لفكرة الحساسيه للأحوال الإبتدائية.

وفى الواقع الحساسية للأحوال الابتدائية توصل إليها قبل لورنز العالم ماكسويل[١٣] (١٨٧٦) صاحب النظرية الحركية للغازات حيث حذر من مسلمة التحديدية determinism التى تنص على «نفس الأسباب تؤدى إلى نفس النتائج» وينبه إلى أنه يجب ألا نخلطها بالفرضية «الأسباب المتشابهة تؤدى إلى نتائج متشابهة. وذلك لأنه يوجد حالات فى الفيزياء تؤدى تغييرات طفيفة ابتدائيه فيها إلى اختلاف كبير فى الحالة النهائية. كما أشار الرياضى پوانكريه ١٩٠٢ فى كتابه الطريقة والعلم إلى فكرة الحساسية للأحوال الابتدائية (لم تكن بهذا المسمى)، حيث ذكر «أن عدم التبؤ بتقلبات الطقس وسقوط المطر وحتى العواصف لا تبدو أنها راجعة إلى عوامل الصدفة ولكن إلى تغيير ابتدائى بسيط يصل إلى $\frac{١}{١٠}$ درجة».

نرجع ثانية إلى المعادلات التفاضيله الثلاث التى قدمها لورنز للدراسة - (متأثراً بما تعلمه من سولتزمان Saltzman كنموذج ثنائى البعد لتيارات الحمل convection فى طبقة أفقيه لسائل يسخن من أسفل:

$$X^{\cdot} = \frac{dx}{dt} = -\sigma x + \sigma y, \qquad \sigma=10$$

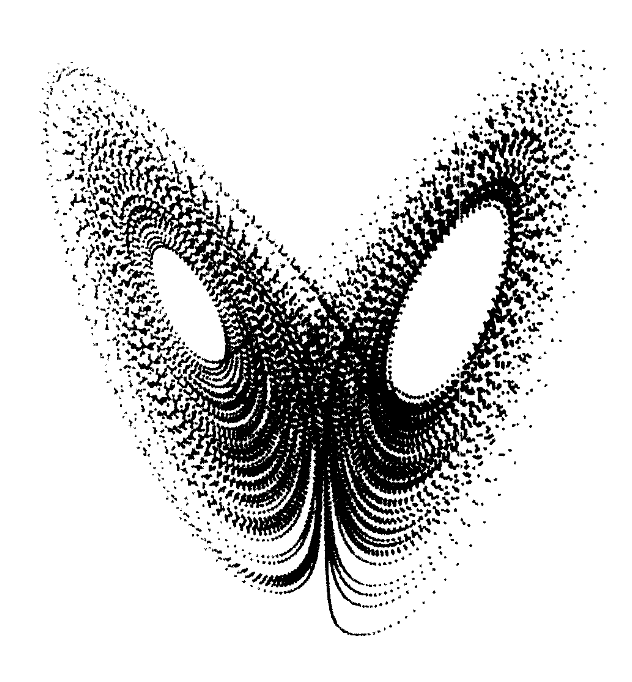
$$Y^{\cdot} = \frac{dy}{dt} = rx - y - zx, \qquad r = 2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

$$Z^{\cdot} = \frac{dz}{dt} = -bz + xy^{\cdot} \qquad b = 8/3$$

حيث $X^{\cdot}$, $Y^{\cdot}$, $Z^{\cdot}$ هى تفاضل الدوال بالنسبة للزمن. وقد ذكر لورنز أنه خلال الحسابات أراد أن يقترب جداً من أحد الحلول. ولهذا ابتدأ يرجع لبداية التكامل باستخدام قيم بينيه تظهر على شاشة الكمبيوتر لحالة ابتدائية initial condition. ولدهشته كانت الحسابات الجديدة متباعدة diverged تدريجيًا من النتيجة الأولى لتصل إلى نتائج مختلفة فى أربعة يام للطقس weather. فظن فى البداية أن ذلك يرجع لفشل أجزاء الكمبيوتر الصلبة hardware. وللتسريع أعطى أوامر للكمبيوتر للتقريب لثلاثة أرقام عشرية حيث كانت الحسابات تجرى على ٦ ستة أرقام عشريه. فوجد أن الحالة الابتدائيه الأولى التي دخلت البرنامج لم تناظر match القيمة الناتجة عن التكامل الأول. كل فرق صغير ابتدائى توسع فى كل خطوة تكامل سببة إختلافًا يُعد كبيراً بعد برهة بين الحلين. ومعنى ذلك أن التنبؤ بالطقس على المدى الطويل من المستحيل. وذلك لأن الأخطاء البسيطة التى لا يمكن تحاشيها تتضخم amplified كلما مر الوقت مما يجعل القيم التى يحصل عليها بواسطة التكاملات العديدة غير ذات معنى فى فترة قصيرة من الزمن. ومن المشوق أن تعرف أن كمبيوتر لورنز الذى كان يستعين به كان عتيقًا سعته 16 K.b ويمكنه إجراء ٦٠ عملية ضرب فى الدقيقة وتكامل نظام من ١٦ معادلة تفاضلية يتطلب ثانية فى كل خطوة التكامل[١٣].

المهم أن حل نظام المعادلات التفاضيلة الثلاثة (١) للورنز أدى للتوصل إلى أعجب جاذب غريب يتكون من مسارات حلزونية غير متقاطعة يمنيًا ويساراً مُكونة

شكل جناحي فراشة. أنظر شكل (٣٨) ـ يبرز شيئًا فشيئًا من بين نقط عشوائية كأي جاذب غريب.



شكل (٣٨) جاذب لورنز الغريب

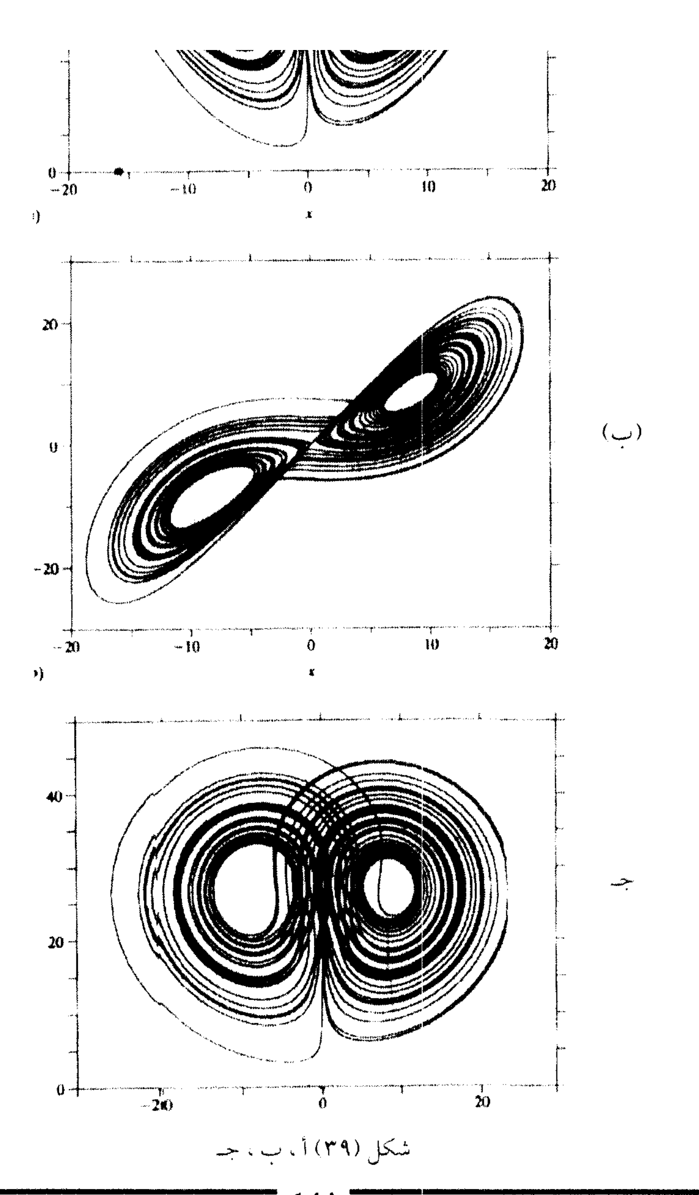
وللتوضيح نقدم شكل (٣٩) أ، ب، جـ التى تبين مسقط جاذب لورنز فى المستوى XZ, XY, YZ على الترتيب التى توصل إليها من نتائج التكاملات العددية لنظام لورنز لمعادلاته الثلاثة التفاضيلة (١) عند قيم البارامترات $r=28, \sigma=10, b=8/3$

حيث الزمن t: $30 \leq t \leq 70$

ويمكن التحقق من أن نقطتى الاتزان C, C^1 (نقطة الاتزان فى نظام المعادلات التفاضيلة تناظر النقطة الثابتة) هى $C, C^1 = (\pm 8.48 , \pm 8.48)$

فى المستوى XZ, XY

C^1 مسـارات غير مـتقاطـعة (لأنهـا فى فراغ ذو ثـلاثة أبعـاد). وهكذا يـبدو تعـاقب الحلزونات كتعاقب عشوائى random. والإجراءات الحسابية تبين أن جوار المسارات الغـريبة من الجـاذب الغريب تـتحدد بدالـة قوى power function. وعـلـى ذلـك فالمسارات التى تبدأ قريبة جدًا من بعض تنفصـل سريعًا مفتقده أى ارتباط فيما بينها. ولذلك فإنه يوجد حـساسية معتمده على الأحوال الابتدائـيه. وإذا أعيدت الحسابات واستخدام كمبـيوتر آخر أو برنامج مختلـف فمن المحتمل أن تتباعد الـنتائج الجديدة عن الموجودة بالـشكل السابق حتى لأن المسـارين المحسوبين X(t) سريعًا مـا يكونان غيـر مرتبطـان بالرغم مـن أنهما يـعبران عـن نفس الجاذب. وعـلى ذلك فالمسارات trajectories التى تتقارب للجاذب تكون لها حـاسيه للأحوال الابتدائيه. والحساسيه فى شـكل (٣٨) تناظـر الحقيـقة بأن المـسارات المبتـدئه عنـد حالتـين قريبتـين تنتـهى بالالتفاف حول جناحى الفراشة.



شكل (٣٩) أ، ب، جـ

وعمومًا فالجاذب الغريب للورنز له ملامح أخرى، فالمسارات الداخلية تكون كثيفةdense. وهذا يعنى أنه متعدى transitive ديناميكيا أو أنه لا يمكن تقطيعه -in decomposable إلى قطع صغيرة لا متغيره تحت السريان Flow، وله نقط اتزان، وأنه شكل فراكتال.

إرجع مرة ثانية وتأمل جاذب لورنز الغريب، تأمل الناحية الجمالية شكل دقيق ساحر لا تتقاطع طياته (مساراته) ذات اليمين وذات الشمال (لأنه فى فراغ زى ثلاثة أبعاد مثل أستك على حرف 8 برفع الجزء الأوسط للأستك تجده غير متقاطع فى الفراغ الثلاثى). هذا الفراكتال (الجاذب الغريب) وليد لنقط عشوائية لا نظاميه يبرز من خلالها. ولم يُعطى لشكله اسم الجاذب الغريب للورنز إلا بعد سنوات عديدة. واسترجع أنه نتج من حسابات، عدد قليل من معادلات تفاضيلة لاكتشاف سر من أسرار الطبيعه مرتبط بالطقس.

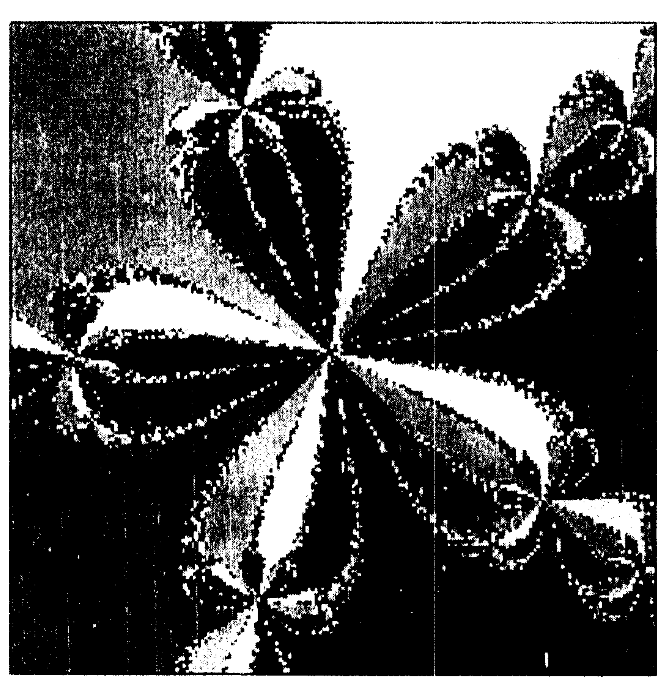
هذا الشكل فتح فيما بعد آفاقًا لدراسات فى الرياضيات والهيولية (الفوضى) chaos والنظم الديناميكية وتكنولوجيا الاتصالات والعلوم المعاصرة. وعمومًا فجاذب لورنز الغريب يعتبر الآن جاذب كلاسيكى وإذا كان جاذب لورنز تولد من خلال حل معادلات تفاضيلة. فهل تتخيل أن حل معادلات بالتكرار المرحلى يمكن أن يولد فراكتالات جاذب غريب؟.... هذا سوف نتناوله فى البند التالى.

٤-٥- حل معادلات (فى المستوى المركب) باستخدام التكرار المرحلى، وتوليد فراكتالات بديعة.

سبق أن أشرنا إلى طريقة نيوتن فى حل المعادلات باستخدام التكرار المرحلى من خلال التوصل إلى تقريبات لحلول مخمنه. وقد وجد أنه عندما تكون الحلول أعداداً مركبه complex numbers أنه المنطقه المشتركة بين أى حلين تكون على شكل معقد غريب جميل لا يتصوره العقل.. هو شكل فراكتال. فإذا إخترنا أو قمنا بتخمين نقطة قريبة من أحد الحلول فى منطقة الحدود بين الحلول بإستخدام الحاسب فإننا نجد التكرارات المرحلية تعطى نتائج.. عبارة عن نقط تتراقص عشوائيا قبل أن تتقارب

لأحد الحلول عند الحدود مباشرة فى التكرارات اللانهائية. ومن هذه النقط العشوائية اللانظاميه يبرز فراكتالات تتميز بجمال فريد. وما دامت هذه الفراكتالات تولدت من خلال عمليات هيوليه (أو جوازا فوضويه) chaotic فهى أيضًا جاذب غريب.

هل تتصور أن شكل (٤٠) نشأت الفراكتالات الخمسة فيه من إستخدام طريقة نيوتن فى حل معادلة من الدرجة الخامسة فى المستوى المركب أو بالأحرى من البحث عن القيم الصفرية للدالة المركبة $Z \to Z^5 - 1$ فى المستوى المركب complex plane. حيث تشير المقاييس الرمادية المختلفة إلى المناطق التى تُوصل إلى نفس الحل (أو التى عندها تكون الدالة صفر) عندما تكون نقطة البداية (للحل المخمن) فيها.



شكل (٤٠)

تأمل مرّة ثانية هذا التشكيل البديع للفراكتال فى الشكل السابق... هل هو تشكيل زخرفى؟ هل هو أزهار طبيعيه؟ هل هو ابداع ليد فنان؟.... لا إنه شكل رياضى قام بعمله تكرار مرحلى يحدد عملية إيجاد طريقة لحل المعادلات.. تعال نلقى ضوءًا

على هـذه الطريقة وجذورهـا التاريخية - نـرجع إلى المعادلـة المذكورة سابقًا لـعمل التكرار المرحلى

$$س_{ن+1} = س_{ن} - \frac{د(س_{ن})}{دَ(س_{ن})} \quad ، ن = ٠، ١، ٢..$$

المولد للمتتابعه $\{س_{ن}\}_{ن=٠}^{\infty}$.

التى تتقارب للجذر ζ .

حيث د:ح ← ح أى $f:R\to R$ (الدالة حقيقية)، ζ هى صفر الدالة د أى $f(\zeta)=o$ ، دَ(س ن) هى تـفاضل الدالـة. وأخذ س. (أى Xo) قريـبة مـن الجذر ζ مـع بعـض شروط معينه.

والواقع أن أفـكار نيوتن حـول هذا الشأن (١٦٦٩) كانت أكـثر صوبة وتعـقيدًا. وقد قام بتبـسيطها رافسون إلى المعـادلة السابقه فى ٢٠ سنة تـقريبًا أى فى (١٦٩٠). ولذا عـرفت بـطريـقة نـيوتـن ورافسـون Raphson. وقـد يصـفهـا البـعض بـأنهـا طريقةالمـماس تبعًا لتـفسيرها الهـندسى.. لأن ميل المماس عند كل نهايـة صغرى = صفر. ولكن استخدم الصفر بديلا لخوازميات (إجراءات أخرى).

وقد حاول كيـلى بعد مائتى عـام أى فى ١٨٦٩ استخدامها لإيـجاد جذور أعداد مركبة لـدوال مركبه $f: C\to C$ بأخذ العـدد المركب Z_0 أى $Z_0 \in C$ ، C مجمـوعة الأعداد المركبة واستخدام التكرار المرحلى الذى يحدد القاعدة.

$$Z_{n+1} = Z_n - \frac{f(Zn)}{f'(Zn)}, \quad n = o, 1, 2....$$

ثم بحث فـى الشروط التى تجعل المتـتابعه $\{Z_n^{\infty}\}_{n=o}$ تـتقـارب converges إلـى الجذر. حيـث كان مهتما بـالمناطق التي تـتقارب فيها الـتكرارات المرحليـة إلى الجذر وسمـاها بأحواض جـذب الجذر ζ . وقد استطاع حـل المشكلة عندما كـانت الدالة المركبة f تربيعية (من الدرجة الثانية). ولكنه فشل بالنسبة للدالة التكعيبيه (من الدرجة الثالثة).

فمثلاً بالنسبة للدالة $f(z) = Z^3 - 1$ التى فشلت طريقة نيوتن التى استخدمها كيلى للتقارب لـها صفة من صفات الفـراكتال وهى البعد الفـراكتالى ولأنها تتطـابق (تقع على) مع حدود أحواض الجذب للجذور المركبه: $e^{2k\, n\, m\pi i/3}, k = o, 1, 2$

أى للجذور $e, e^{2\pi i/3}, e^{\pi i/3}$

أى (هـ ، هـ $^{\frac{٢}{٣}\text{ ط ت}}$ ، هـ $^{\frac{٤}{٣}\text{ ط هـ ت}}$)

وهذه المـناطق (أحـواض الجذب) هى أشكـال فراكتـال بالغـه التعقـد لاحظنـاها بالنـسبة لأشكال التـماثلات فى حل المـعادلة $Z^5 - ١ = 0$ شكـل (٤٠) والتـى أظهـر جمالـها الكمـبيوتر أمـا شكل (٤١) أ فيـبين الفراكـتال (الجاذب الغـريب) أحواض الجذور الثلاثـة وهى صورة مشهورة نشرت فـى العديد من الكتـب – لاحظ تماثلات الزوايا $\frac{٢}{٣}$ط وإذا كانـت هذه صورة مشهورة؟ فهل توجد صـور أخرى لجذور نفس المعادلة المركبة $Z^3 - ١ = 0$ ؟ وإذا كانت الإجابة بالإيجاب فماذا تظن ما الذى يحدث التغيير فى شكل الفراكتالات المتولدة عن حل نفس المعادلة؟

ربما تصـل إلى أن ذلك يرجـع إلى تغيـير القاعدة الـتى يُحددهـا التكرار المـرحلى للوصول إلـى التقارب Convergence أو بالأحرى طرق التكرار المـرحلى للتقارب. فى الـواقع لا يكـتفى الـرياضيـون التوصل إلـى حل بطـريقة مـا، ولكن يـبحثـوا فى التوصل إلى طريقة أمثل، فهم يتطلعون إلى الأفضل دائماً.

وبالفعل كانوا يتطلعون إلى إيجاد طرق أفـضل للتكرار المرحلى عن الطريقة التى تستخدم القاعدة السابقة المأخوذة عن طريقة نيوتن لتطبيقها على الدوال المركبة. وكان الدافع وراء ذلك:

(١) «إيجاد جذور معادلات غير خـطيه، ومعرفة الدقة accuracy وثبـات stabitity الخوارزميات ـ الاستراتيجيات (الإجراءات) الحسابية.

(٢) لاظهار جمال الرسوم التى تنتج بواسطة الكمبيوتر.

(٣) استخدام أساليب لتسريع التقارب.

وعن طريق الـطرق العددية والتـحليل العددى أمكـن التوصل إلى طرق لـلتكرار المرحلى (أو بالأحرى قواعد مختلفة يحددهـا التكرار المرحلى) أنتجت أشكالاً بديعه

مبهرة لفراكتالات ملونه غاية فى الجمال مختلفة، على سبيل المثال بالنسبة لمناطق (أحواض) جذور المعادلة المركبة التكعبية $z^3 - 1 = 0$ للدالة $f(z) = z^3 - 1$.

ومن المشوق أن نكتفي بذكر أهم هذه الطرق وقاعدة بعض منها التى يحددها التكرار المرحلى والشكل الناتج من استخدامها (وللمزيد من الدراسة أنظر مرجع(12)).

٥-٤-١- طرق التكرار المرحلى، والفراكتالات البديعة المتولدة من حل المعادلة المركبة التكعبيه(١٢) $Z^3 - 1 = 0$

١- طريقة نيوتن للجذور المتعددة multiple roots (بدرجة، للتقارب): انظر شكل (٤١) ب

$$Z_{n+1} = Z_n - \frac{f(Zn)\, f'(Zn)}{f'(Zn)^2 - f(Zn)\, f''(Zn)}$$

٢- طريقة هويتاكر Whitacker للاسراع المحدب convex acceleration أنظر شكل (٤١)ب - وهى تعرف أيضًا باسم طريقة الوتر المتوازى تبعًا لتفسيرها الهندسي. وهى تبسيط لطريقة نيوتن بتحاشى حساب المشتقة عن طريق عمل التقريب $f'(Z) = \frac{1}{\lambda}$

حيث λ بارامتر نختاره لكى تكون الدالة $F(Z) = Z - \lambda f(Z)$ انقباضية (انكماشيه) contractive . وعلى ذلك لها نقطة ثابتة هى جذر للدالة f انظر شكل (٤١) جـ (وهى بدرجة تقارب 2) وتستخدم القاعدة:

$$Z_{n+1} = Z_n - \frac{f(Zn)}{2\, f'(Zn)} (2 - L_f(Zn))$$

حيث $$L_f(Z) = \frac{f(Z)\, f''(Z)}{f'(Z)^2}$$

٣- طريقة هويتاكر للاسراع المحدب المضاعف double convex acceleration

أنظر شكل (٤١) د (وهى بدرجة تقارب ٣) أو تستخدم القاعدة:

$$Z_{n+1} = Z_n - \frac{f(Zn)}{4 f'(Zn)} \left[2 - L_f(Zn) + \frac{4 + L_f(Zn)}{2 - L_f(Zn)(2-L_f(Zn))} \right]$$

٤ ـ طريقة هالى Halley وتعرف، بطريقة مماس القطوع الزائدة Tangent hyperbolas وهى طريقة مشهورة لحل معادلات غير خطية. (وهى بدرجة تقارب ٣). أنظر شكل (٤١) هـ وتستخدم القاعدة:

$$Z_{n+1} = Z_n - \frac{f(Z_n)}{f'(Z_n)} \quad \frac{2}{2 - 2f(Z_n)} = Z_n - \frac{1}{\frac{f'(Z_n)}{f(Z_n)} - \frac{f''(Z_n)}{2f'(Z_n)}}$$

٥ ـ طريقة شبشف Chebyshev وتعرف بطريقة أويلر شبشف لتفسيرها الهندسى لمماس القطع المكافئة للدوال الحقيقية. وهى كالسابقة مشهورة لحل معادلات غير خطية. (وهى بدرجة تقارب ٣). انظر شكل (٤١) وهى تستخدم القاعدة:

$$Z_{n+1} = Z_n - \frac{f(Z_n)}{f'(Z_n)} \left[1 - \frac{Lf(Z_n)}{2} \right]$$

٦ ـ الطريقة الخارقة لهالى Super Halley method أو المعروفة بطريقة نيوتن للإسراع المحدب أو طريقة هالى ـ فيرنر Halley - Werner . وهى من أشهر وأقوى الطرق التى تحول المعادلة إلى معادلة ذات نقطة ثابتة. (وهى بدرجة تقارب ٣) انظر شكل (٤١)ز. وتستخدم القاعدة:

$$Z_{n+1} = Z_n - \frac{f(Z_n)}{2f'(Z_n)} \quad \frac{2 - Lf(Z_n)}{1 - Lf(Z_n)} = Zn - \frac{f(Z_n)}{f'(Z_n)} \quad 1 + \left[\frac{\frac{1}{2} Lf(Z_n)}{1 - Lf(Z_n)} \right]$$

كل هذه الطرق للتكرار المرحلى السابقة تحسب f، ومشتقها فى كل خطوة للطريقة لنقطة واحدة. ولكن يوجد طرق مرحلية التكرار المتعدد التى تحسب فيها قيمة f، والمشتقة لأكثر من نقطة فى كل خطوة.

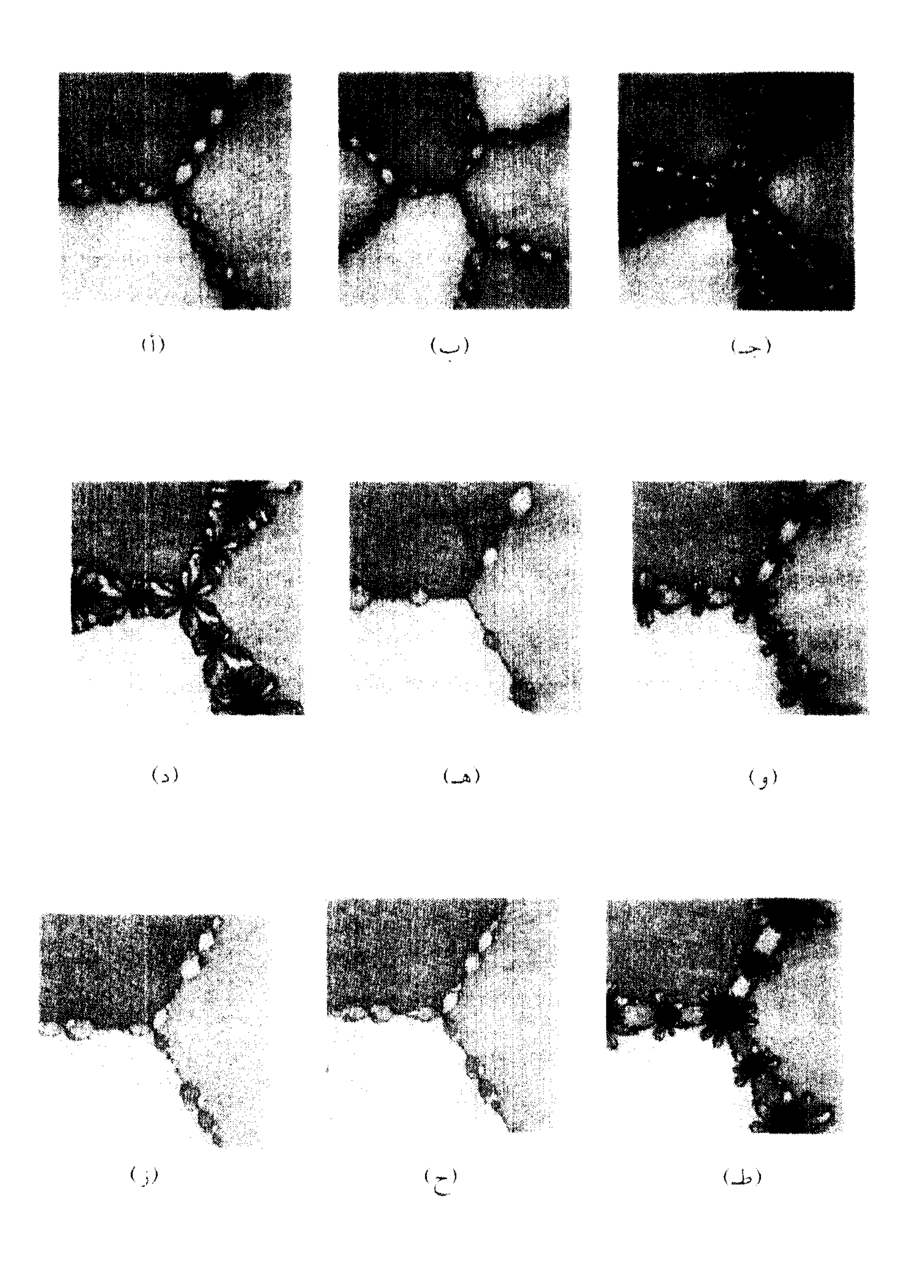
٧ ـ طريقة تروب ـ أوستروسكى Traub - Ostrowsti (وهى تقدم أكبر درجة للتقارب (انظر شكل (٤٧)٢، مثلها مثل طريقة چارات Jarrat انظر شكل (٤١)ح، وطريقة چارات العكسية انظر شكل (٤١) ط.

وتستخدم طريقة تروب ـ أوستروسكى القاعدة:

$$Z_{n+1} = Z_n - u(Z_n)\frac{f(Z_n) - u(Z_n) - f(Z_n)}{2f(Z_n - u(Z_n)) - f(Z_n)}$$

وعموماً عن طريق استخدام الطرق المختلفة للتكرار المرحلى التى ذكرناها وطرقاً أخرى وباستخدام امكانيات تكنوچوليا الرسوم الكمبيوترية وألوان الكمبيوتر أمكن التوصل إلى بديع أشكال الفراكتال فى المناطق القريبة من الجذور (أحواض الجذور) التى تظهر ملونة على شاشة الكمبيوتر، بتطبيقها على الدالة $f(z): z^3 - 1$. وقد استخدم اللون الأصفر لأحواض جذب الجذور $1, e^{2\pi i/3}, e^{4\pi i/3}$ مع التفتيح والتغميق نسبة إلى عدد التكرارات المرحلية للتوصل (للتقارب) للجذر بالدقة المطلوبة. ومع وضع علامة اللون الأسود للنقط المناظرة لطريقة التكرار المرحلى بداية بالنقط Zo التى لا تصل إلى جذر.

والإنبهار والاستمتاع بهذه الأشكال (انظر شكل (٤١) أ ـ ط)[١٢] ليس فقط لروعة جمالها أو اختلاف أشكالها باختلاف الطرق التكرارية المرحلية المختلفة، ولكن فى عملية تكوينها البديع من تحركات عشوائية للنقط حتى تبرز الفراكتالات (الجذاب الغريب) لكل منها.



شكل (٤١)

وختاماً، فقد استرسلت فى هذا البند لأن المعلم فى دراسته وتدريسه يتعرض لحل المعادلات بصفة عامة وباستخدام طريقة نيوتن القائمة على التكرار المرحلى بصفة خاصة، ولايجاد الجذور التكعيبية للواحد الصحيح وفى استخدام الخواريزمات. والخواريزمات هى ببساطة اجراءات أو تكرار خطوات معينة كالتى تستخدمها فى القسمة ا لمطولة. وهى تنصب أيضاً على التكرار المرحلى.

مثل هذه الأفكار تثير ما قدمناه، حيث يمكن أن تكون دافعاً للمعلم لفهم أعمق أو اشراك تلاميذه فى الاستمتاع بالفراكتالات البديعية ا لمرتبطة بحل ز^{٣} − ١ = ٠ أو معايشة الفكر الرياضى المعاصر. فما قد يهمنا فى تدريس الرياضيات التقليدية هو إيجاد جذور المعادلة أو بالأحرى مجموعة الحل لها. أما الفكر الرياضى المعاصر فيهتم بالبحث عن تصرفاته وديناميكيات الدالة فى منطقة الجوار لجذور المعادلة وحدودها. بالاضافة إلى أننا كنا نستعين بالرسم البيانى كأقصى ما يمكن استخدامه كوسيلة لتوضيح إجراءات الحل الجبرى أو ايجاد الحل. أما فى الفكر الرياضى المعاصر فقد تلاحم استخدام الكمبيوتر بإمكانياته الهائلة فى رصد التكرارات المرحلية وفى الرسوم الكمبيوترية graphics والحركة وتكنولوجيا استراتيچيات الألوان فى دراسة ما وراء الحل، وللتوصل إلى الفراكتالات البديعة المختلفة وعملية تكوينها فى مناطق أحواض الجذب. وذلك باستخدام طرق تكرارية مرحلية مختلفة قدمها رياضيون (شكليون ـ متخصصون فى التحليل الرياضى) نتيجة دراستهم لتكون أكثر دقة وأكثر سرعة تقارب وأعلى درجة تقارب.... وقد اكتفيت بتقديم بعضاً من هذه الطرق وقواعدها لإثارة المعلم للدراسة المستقلة ليعرف المزيد عنها وعن طرق استثارتها فى كتب التحليل العددى الجديدة.

فى البندين السابقين قدمنا جاذب لورنز الغريب، وجاذب غريب مرتبط بحل معادلات مركبة باستخدام طرق تكرارية مرحلية. والآن تعال نعيد التفكير فى أجمل وأعقد فراكتال مشهور هو أيضا جاذب غريب. وهو ما يعرف بفراكتال مجموعة

ماندلبروت ومجموعة جـزئية منها عرفت من قبل معروفة باسم مـجموعة چوليا، فى البند التالى.

٥ - ٥ : أشهر وأجمل جاذب غريب - مجموعة ماندلبروت - مجموعة چوليا

تعال نـتأمل مرّة أخرى شـكل (٦)، (٧) بالفصل الـثالث. هل تتـصور أن صورا بهـذا الجمال الفـريد هى نـتائج إجراءات ريـاضية تـخص دوال مركـبة فى المسـتوى المركب تربيعـية بقاعدة بسيطة؟ هل تتـصور أيضاً أن ظهورها على شاشة الـكمپيوتر ببـطء يحتاج إلـى برنامـج ببضـعه أسطر (أوامـر) قليـلة فقـط؟ وأنه يبرز مـن خلال اضطرابات ولا نظام عشوائى من نقط ـ هيولية Chaos؟

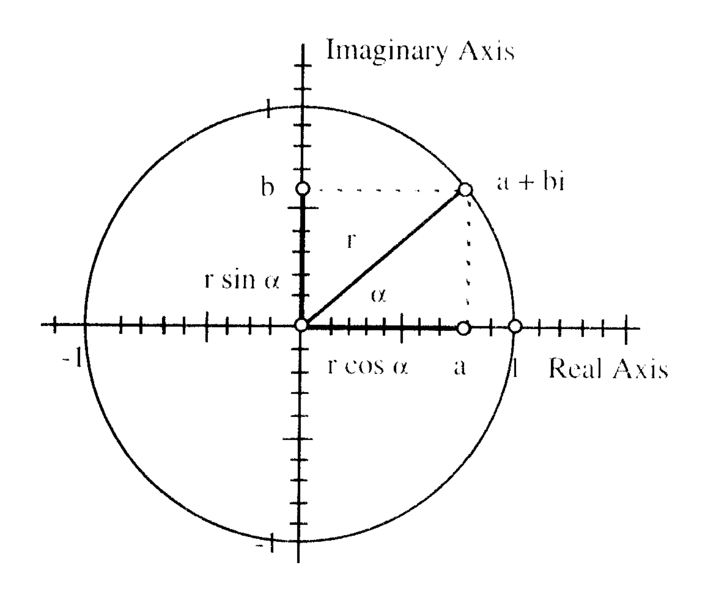
كمعـلم رياضيات لـن يشبعك الـتطلع إلى الـصورة وتلمس نـواحيها الجمـالية، ولكنك تتطـلع بحب استطلاع لمعرفة ولـو القليل عن الأساس الرياضى فـى تكوينها (توليدها) وهذا ما سوف نتعرض له.

ولقد تـوصلنا فى بـند (٥-١، ٥-٢) إلى أن نظم الدوال الـتكرارية مرحـليا IFS استخدمت فى توليد فراكتالات جاذب غـريب وفراكتالات تحاكى الطبيعة. وأن هذه الدوال خطيـة وانكماشية أما تـوليد أشهر وأجمـل جاذب غريب والمسمى مـجموعة مانـدلبروت فـهو يتـولد بواسـطة التـكرار المرحلـى لدوال تربـيعــية فــى المستــوى المركــب. مثل هذه الدوال تعتبر حالة خاصة من فصل معادلات الفروق difference equations ذات البعدين ومن أمثلتها الدالة اللوچستيه Logistic mapping .

$$f(x) = rx\,(1 - x)$$

الحقيقة أو المركبة والتى تستخدم كمدخل لدراسة الهيولية Chaos.

والآن تعال نسترجع معـلوماتنا عن تمثيل الأعداد المركبة فى المستوى المركب انظر شكل (٤٢).



شكل (٤٢) يمثل النقط فى المستوى المركب

المستوى المركب C يتكون من النقط على الصورة a + bi حيث $i = \sqrt{-1}$. المسافة r من نقطة الأصل إلى النقطة a + bi تسمى المقياس modulus. إذا وقعت هذه النقطة على دائرة الوحدة فإن r = 1. تُمثل النقطة أيضاً $a + bi = r(\cos \alpha) + r(\sin \alpha)$.

٥ - ٥ - ١ - بعض مجموعات جوليا

كان جوليا [١٠] Gaston Julia (١٩١٨) مهتما بالدوال التكرارية مرحليا Iterated Functions وخاصة الدوال المركبة. فمثلا الدالة: $Z^2 \rightarrow Z^2 , Z \in C$.

ترسم كل نقطة فى المستوى بتربيع إحداثيات النقطة فوق نقطة أخرى فى المستوى. وكان جوليا شغوفاً بمعرفة تصرف النقط على المدى الطويل فى المستوى المركب بالتكرار المرحلى لهذه الدالة المركبة التربيعية البسيطة. فمثلا صورة النقطة a+ bi بالدالة التربيعية $Z \rightarrow Z^2$ أو $(f(z) = Z^2)$ هى النقطة التى يمكن تمثيلها:

$$(a + bi)^2 = a^2 - b^2 + 2abi$$

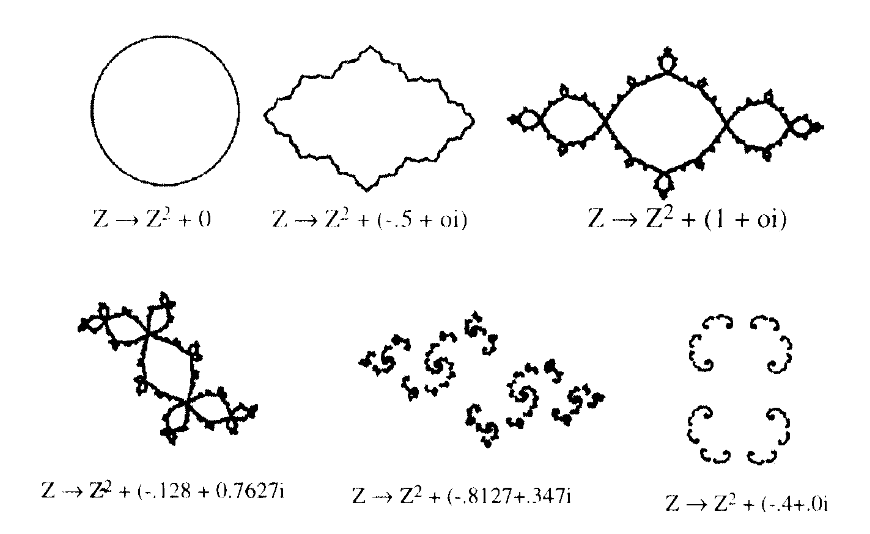
$$(r(\cos \alpha) + r(\sin \alpha))^2 = r^2 (\cos(2\alpha) + i \sin(2\alpha))$$

إذا كان المقياس r أكبر من 1 أى r > 1 فإن تربيعه يكون أكبر منه أى $r^2 > r$. ومع التكرار المرحلى فإن صورة النقطة تبتعد اكثر واكثر من نقطة الأصل مع تضاعف الزاوية فى كل تكرار. إما إذا كان المقياس r أقل من الواحد أى r < 1 فإن تربيعه يكون أقل منه $r^2 < r$.

وعلى ذلك عند r < 1 ومع التكرارات المرحلية المتعاقبة تقترب الصورة من نقطة الأصل مع تضاعف الزاوية فى كل تكرار. أما إذا كانت r = 1 فإن الصور تقع على الدائرة. وبتصور التكرار المرحلى المتعاقب لهذه الدالة $z \to z^2$ فإن كل النقط داخل الدائرة تبدو كأنها تدور حلزونياً ناحية نقطة الأصل. أما النقط خارج الدائرة فتدور حلزونيا ناحية اللانهاية. وتبقى النقط على الدائرة عليها. أى أن النقط داخل الدائرة وخارجها. تبدو أنها تتحرك بعيداً عن الدائرة. ولذا فإن الدائرة (أو ما يناظرها) تسمى بمجموعة التنافر للدالة reppeling set. وإذا كانت مجموعة التنافر للدالة ذات مسارات متصلة Path connected (بمعنى لأى نقطتين فيه يوجد مسار متصل بينهما يقع فى المجموعة) فإنها تسمى مجموعة چوليا. وعلى ذلك فالدائرة هى مجموعة تنافر وفى ذات الوقت مسار متصل ولذا فهى مجموعة چوليا.

أما إذا أخذنا الدالة التربيعية $z \to z^2 + c$.

حيث C بارامتر عدد مركب. عندما يكون C = O فإن مجموعة چوليا تكون دائرة. أما إذا أخذنا C عدد مركب لا يساوى الصفر C ≠ O فإن مجموعات چوليا تصير أكثر تعقيداً. انظر شكل (٤٣).



شكل (٤٣) عينة من مجموعات چوليا بإختلاف البارامتر c

أما مجموعة چوليا الرائعة الجمال فـى شكل (٦) فى فصل ٣ السابق فإن البارمتر $c = a + bi$ حيث: $c = o.2232 - 0.7296\ i$.

$(- 0.4452514 \le b \le - 0.4451650)$ ،$(- 0.3194417 \le a \le - 0.3193553)$

ـ لاحظ المدى الصغير جدًا للجزء الحقيقى a، والجزء التخيلى b الذى ينتج شكل (٦) الرائع.

عموماً قد تأخذ مجموعات چوليا أشكال منحنى فراكتال معقدة أو نقط مبعثرة تسمى غبار الفراكتال لچوليا.

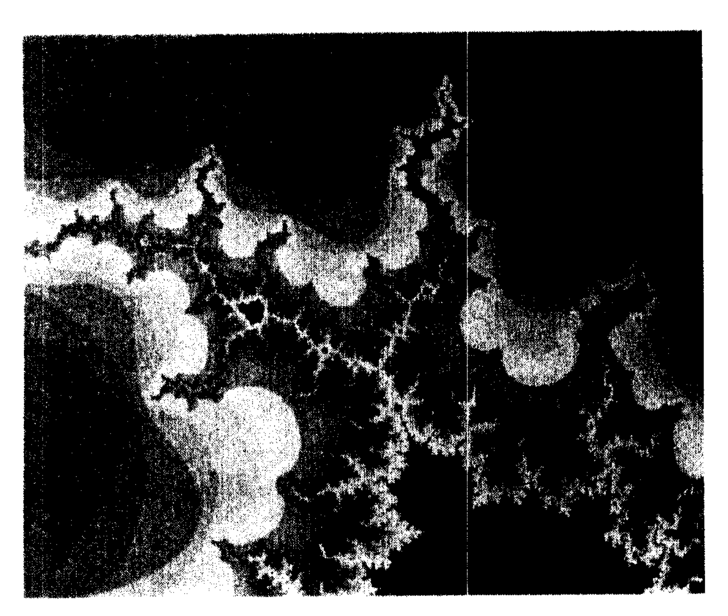
٥-٥-٢-: مجموعة ماندلبروت

استرعى اهتمام ماندلبروت مجموعات چوليا. وراح يدرس قيم البارماتر c للدالة $z \to z^2 + c$ التى تؤدى إلى أن تكون مجموعات چوليا متصلة connected ومن خلال دراسته الدائبة. اكتشف المجموعة التى تحمل اسمه... وهى مجموعة

ماندلبروت. حيث استخدم النقطة الإبتدائية التى يبدأ منها عملية التكرار المرحلى النقطة $z = o + oi$.

وفى عام ١٩٧٨ استطاع ماندلبروت كتابة برنامج كمبيوترى لرسم مجموعة كل نقط فى مستوى البارامتر التى تحقق شرط أن يكون لها مجموعة جوليا المتصلة.

وعلى ذلك فإن مجموعة ماندلبروت ببساطة هى مجموعة كل النقط c فى مستوى البارامتر للدالة $z \to z^2 + c$ فى المستوى المركب لها مجموعة جوليا المتصلة Connected.



شكل (٤٤) أجزاء من مجموعة ماندلبروت

فى شكل (٤٤) (أو شكل ٨ فى الفصل الثالث) البارامتر $c = a + bi$ يكون $-1.23 \le a \le -1.1$، $0.25 \le b \le 0.358$

أما فى شكل (٧) الفصل الثالث يكون $-2.25 \le a \le 2.25$، $-1.25 \le b \le 1.25$.

لاحظ الفروق الصغيرة فى الجزء الحقيقى والجزء التخيلى التى تحدث هذا التغير الكبير فى الشكلين (٤٤)، (٧ السابق فى الفصل الثالث).

لاحظ أيضا وجود دوريات للتفرعات (قرون الاستشعار ـ مثل الهوائى ـ anten-na) من الكرويات (شكل اللمبة) bulbs. منها دوريات ثنائية، وثلاثية ورباعية للدورة شكل (٤٤).

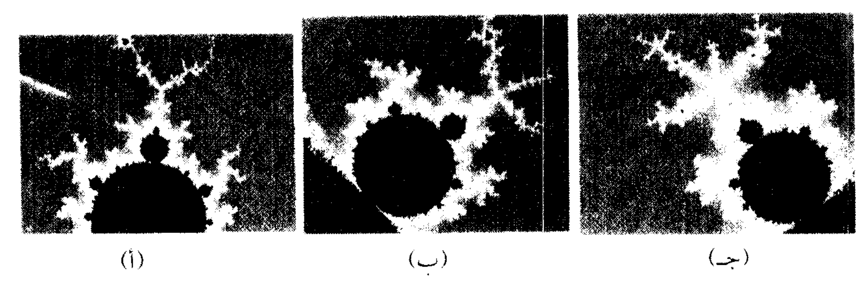
تعتبر النقطة o + io النقطة الحرجة للدالة. فهى النقطة الوحيدة اللامتغيرة invari-ant تحت الدالة $z \to z^2 + c$. فكل النقط الأخرى فى مجموعة ماندلبروت تختلف من تكرار مرحلى لتكرار آخر تالى. وبالتكرار المرحلى نجد أن بعض النقط C تستقر مباشرة فى دورات دورية Periodic cycles. فمثلا بأخذ c= - 1 + o i فإن التكرارات المرحلية المتعاقبة تتبدل بين النقطتين o + oi & -1 + oi. مكونة دورة cy-cle من دورتين 2 periods. وبأخذ النقطة الإبتدائية c = 1.317 + oi فنجد النقط بالتكرار المرحلى تستقر فى أربع دوريات تتكون من النقط:

-1.1429527 + oi ، -0.016591 + oi ،

-1.36884 + oi ، 0.4171897 + oi

ومن المثير فى مجموعة ماندلبروت أن دوريات النقط تحت الدالة $z \to z^2 + c$ تجمع نفس الدورية مع الكرويات bulbs . فمثلا عند كل كرويه bulb الساق مع التفرعات (قرون الاستشعار) تكون دورية. فمثلا شكل (٤٥) أ قرن الاستشعار الرئيسى يتكون من ساق وفرعين مجموعهم ٣ لتشير إلى أن دورية الكروية هى ٣. وفى شكل (٤٥)ب ـ (١ ساق + ٣ فرع = ٤) تشير إلى أن الدورية ٤ للكروية الخارج منها أربعة قرون استشعار.

وشكل (٤٥) جـ يبين أن الدورية ٥ (الساق الخارج من الكروية الصغيرة + ٤ فروع متفرعة منها).



(أ) Period 3 Bulb Antenna
(ب) Period 4 Bulb Antenna
(جـ) Period 5 Bulb Antenna

شكل (٤٥)

عموماً الملامح السابقة تلقى الضوء على غموض وسحر وامكانية تبسيط المعالجات الرياضية لأغرب وأعقد فراكتال جاذب غريب مثير للتفكير والخيال يخلب الفؤاد والروح بجماله.

٥-٦ - أشكال بديعة وزخارف حدودياتها فراكتالات

كلنا يعرف ألغاز تكوين الصور من أشكال صغيرة متعرجة Zigzag Puzzle.

هل تعتقدأن شكل السطح الناتج يكون متشابهاً ذاتيا؟ (أى فراكتال؟).

هل يمكن تغطية سطح بأشكال حدودها منحنيات فراكتال؟

من خلال الإجابة على السؤال الأول أمكن التوصل إلى هندسة عصرية جديدة هى الهندسة غير الابدالية اخترعها وبلورها الرياضى روچر بنروز فى أخر السبعينات. تضمن إثارتها تكوينات هندسية بديعة لا تتكرر بإنتظام أى لها صفة شبه دورية Semi - Periodic أو aperiodic.

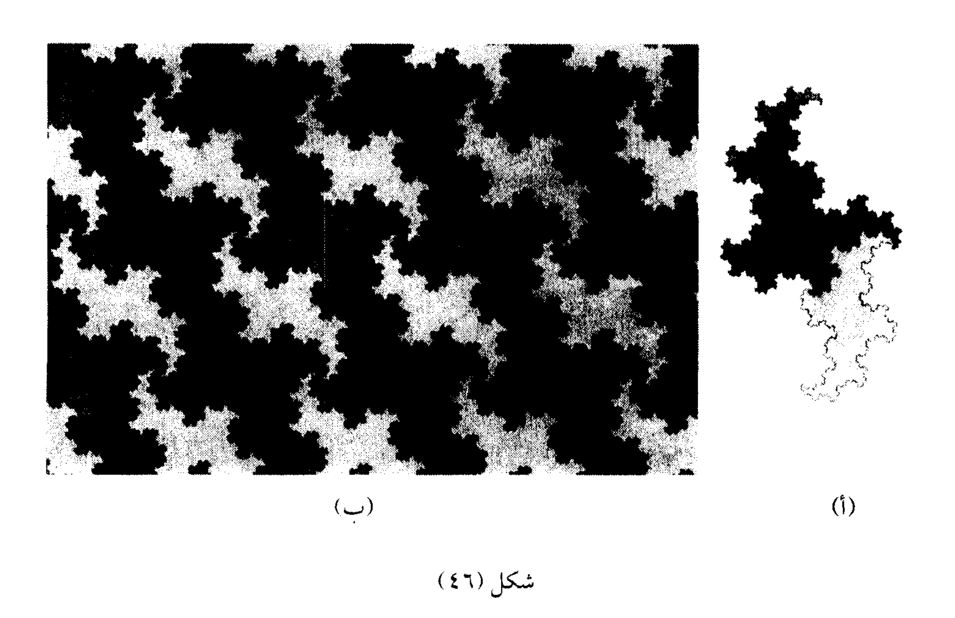
أما السؤال الثانى فكانت إجابته نتيجة اللعب بأفكار رياضية، وتوليد فراكتالات على حدود وحدات التكوينات الهندسية بعض رياضيين مثل الرياضى مارك مكلور.

ما يهمنا هنا هو تقديم بند (فقرة) لإراحة الذهن والتجديد العقلى يتضمن بديع تكوينات هندسية من هذا المنطلق.

كما نعلم يمكن تغطية (أو بالأحرى تبليط tiling) سطح باستخدام مربعات (أو بلاطات tiles) غير متداخلة not overlapping لا تقع على بعض إلا عند الحدود (الاضلاع). وأيضاً يمكن تغطية (تبليط) السطح بأشكال هندسية منتظمة مثل الأشكال السداسية التى يقوم بعملها النحل.

وقد تكون الأشكال الهندسية التى تملأ السطح (تبلط السطح) غير بسيطة أو تتكون البلاطة من تجميع لأشكال بسيطة.

ولكن الغريب أننا نجد أنه يمكن تغطية السطح بأشكال (بلاطات) حدودياتها فراكتال حيث يبدو أن أجزاء من حدودها تتعشق مع بعض. انظر شكل (٤٦) أ، ب.



(ب) (أ)

شكل (٤٦)

لاحظ أن الشكل (أ) يتكون من ثلاثة أشكال متطابقة، حدودياتها فراكتال تتعشق أجزاء منها مع بعضها البعض ويمكن توليد هذا الشكل (أ) وكذلك الشكل (ب) عن

طريق نظام من دوال انكماشية (تشابه بمعامل تصغير مع دوران، وانتقال) IFS. ويسمى كل شكل صغير بلاطة أو الشكل (ب) وحدة تكوين بلاطات Patch of tiles.

والواقع أن ملء (أو تبليط السطح) بأشكال رسوم لكائنات فى الطبيعة (حصان بحر أو slamender أو نباتات...) ابتدعها المهندس الفنان إشر Escher.

وبالطبع قد لا يكون الشكل الناتج (للسطح مثلا) متشابهاً ذاتيا. ولكن كما يسمى يكون التشابه الذاتى مختلطاً mixed، أو digxaph similar sets[٩] أو المتولد عن طريق digraph IFS. أى أن الشكل المتكون لا يكون متشابه ذاتياً كلية ولكن فيه بعض الدورية أى شبه دورى Semi Periodic.

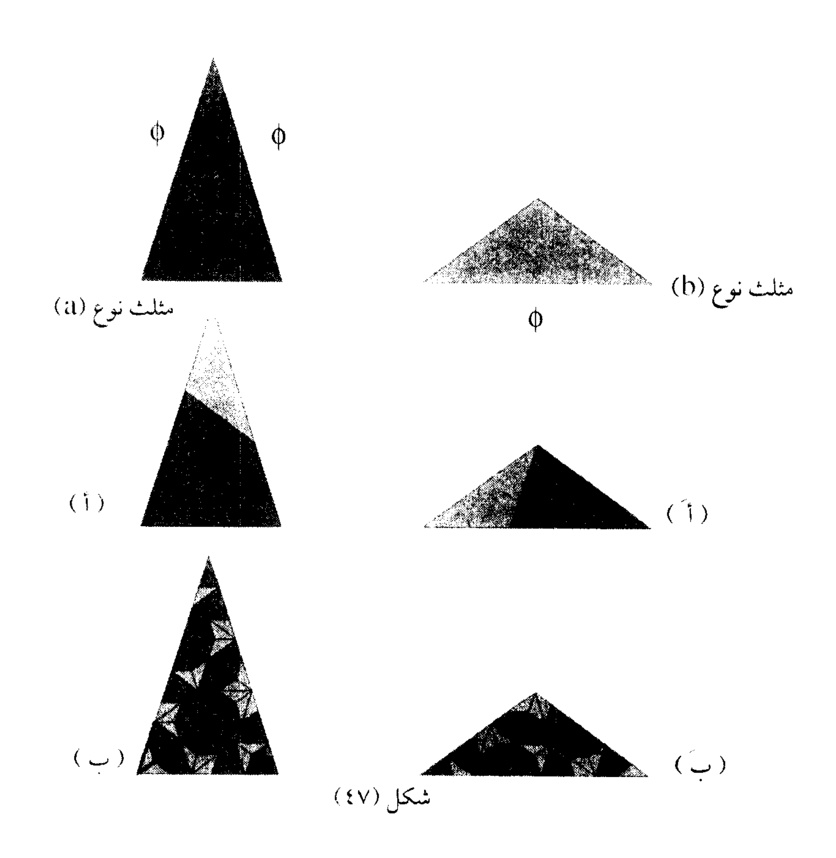
وقد استخدم بنروز نوعين من المثلثات (أ)، (ب) كبلاطات أساسية.

النوع الأول (a) هو مثلث أبعاده ϕ،ϕ، 1 والنوع الثانى (b) مثلث أبعاده 1، 1،ϕ حيث ϕ النسبة الذهبية $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

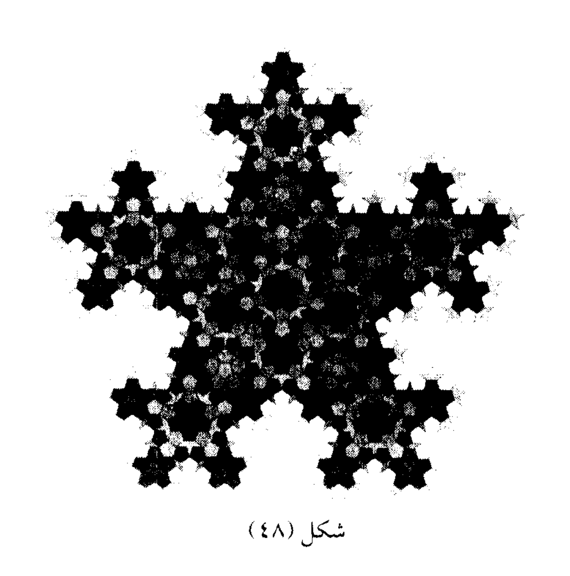
انظر شكل(٤٧). لاحظ أنه يمكن تكوين المثلث (أ) أيضا من مثلثين أصغر من نوع (a) ومثلث أصغر من نوع (b). كما يمكن تكوين المثلث (b) من مثلث من نوع (a) ومثلث من نوع(b) أصغر أيضا (باستخدام نظام الدوال المتكررة مرحليا IFS: تشابه تصغير، تحويل دوران وتحويل انتقال) . وأيضا التوصل للمثلث (a) ، (b) من تشكيلات بلاطات منها كما فى شكلى ب، بَ.

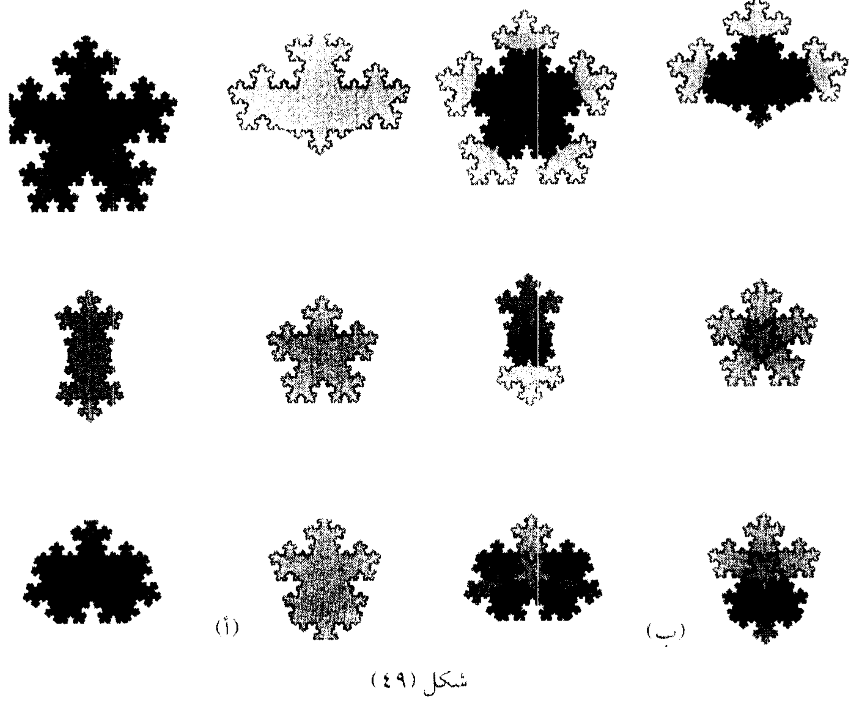
ومن هذه البلاطات نوع (a)، (b) كون تجميع Patches منها على شكل نجمة ونصف نجمة المخمس. ومعين والمخمس وسماها النجوميات الخماسية الساحرة لبنروز Penrose Pentacles لاحظ هذه النجوميات فى جزء من التبليط شكل (٤٨).

أما ماكلور[٩] فقد ولد أحرف نجوميات بنروز (النجمة ـ نصف النجمة ـ المعين المخمس) فراكتالات ـ لاحظ أن هذه الفراكتالات هى فراكتال منحنى كوخ لرقائق الثلج فى شكل (٤٩) أ ثم كون منها التجميعات فى شكل (٤٩) جـ، ثم التبليط فى شكل (٥٠) بالاستعانة بـ IFS والتيوبولوجى.

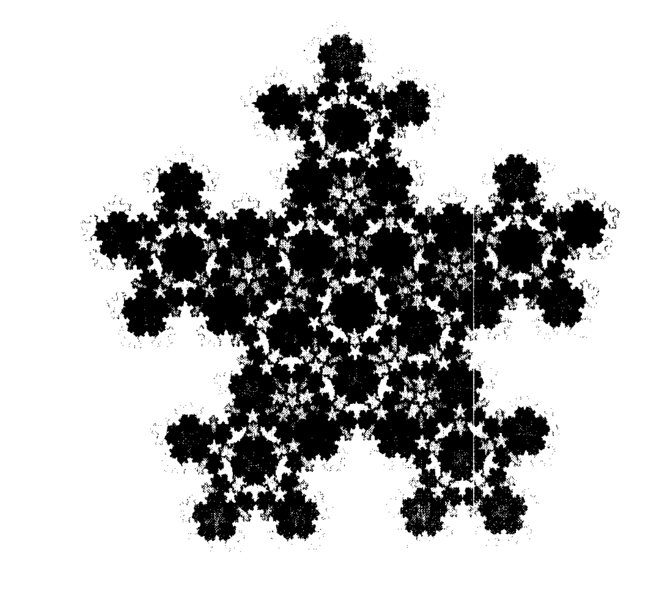


شكل (٤٧)


شكل (٤٨)



شكل (٤٩)



شكل (٥٠)

حاولت من خلال عرض محتوى هذا الفصل إثارة دوافعك لأعمال ابتكارية وتنمية تذوقك للجمال الرياضى، وإكسابك مقدرات فى التحليل للربط بين النواحى الجبرية فى التحليل العددى والنواحى الهندسية، والانطلاق فى عمل التكوينات والتشكيلات الرياضية الفنية غير العادية، وتنمية المرونة فى التفكير الرياضى كما يفعل الرياضيون المعاصرون للتوصل إلى المستوى الأمثل. وكذلك معايشة الرياضيين خلال عملهم الابتكارى الرياضى من استثارة الفكرة عن طريق أعمال سابقة لرياضيين آخرين حتى بلورتها وإختراع كل متكامل (كهندسة جديدة أو موضوع جديد) منها. وذلك مرورًا ببعض أو كل مراحل العمل الرياضى الابتكارى[٣]: التحضير ـ المعالجات الرياضية (الترييض) mathematization ـ التحضين incubation ـ الالهام ـ التحقيق.

والآن بعد قراءتك لهذا الفصل مرّة أخرى. حاول أن تتلمس المواضع التى أحاول فيها مساعدتك على تحقيق الأهداف السابقة وأهداف أخرى ذكرتها فى الفصول السابقة، بقصد تنمية النواحى الابتكارية فيك والتى تعكسها فى تدريسك الابتكارى مسترشدًا ببعض النقط التى أقدمها فيما يلى. ثم استكمل هذه النقاط وسجل آراءك وأفكارك وانعكاساتك حولها في مذكراتك.

(١) حيَّر الرياضى هادامارد، الذى كتب كتاب «حول الاختراع الرياضى» وهو رياضى ابتكارى كبير من أن نظرية يقدمها هو يجد رياضيا آخر يبنى نظرية عليها ويثبتها. ويتعجب لماذا لم يستطع أن يثبت النظرية المبنية على نظريته بالرغم من أنها مباشرة من نظريته؟ ومن المشوق أن نعرف أن الرياضى الكبير هادامارد هو تلميذ الرياضى پوانكريه (صاحب نظرية التوپولوچى الجبرى)، وأن هادمارد كان أستاذاً لأستاذى (المرحوم الأستاذ الدكتور سليمان عبدالعاطى) فى وقت كانت الجامعات المصرية تستقدم أكبر الرياضيين العالميين للتدريس فيها لفترة.

عموماً قدمت فى هذا الفصل من خلال عرض نبذة تاريخية عن أفكار ما، أن رياضيين استثيروا بأعمال رياضيين آخرين، فكانت حافزاً لهم على استكمال هذه الأعمال وبلورتها وعمل بناء رياضى (نظرية أو هندسة...) منها. فمثلا قدمت:

(أ) نبذة تاريخية تبين تأثر وتعجب ماندلبروت لمجموعات چوليا حفزته إلى ابتكار أو عمل مجموعة ماندلبروت كأعجب وأجمل فراكتال.

(ب) نبذة تاريخية عن حل المعادلات بالتكرار المرحلى بطريقة نيوتن أثارت حل المعادلات المركبة وتوليد الفراكتالات الخاصة بها.

(جـ) نبذة تاريخية عن لورنز مع الاشارة إلى أنه كان عاشقاً للرياضيات والألغاز الرياضية منذ صغره.. عكست اهتمامه بحل لغز التنبؤ بالطقس وأدت لإبتكاره جاذب لورنز العجيب، وتفسير مبدأ الحساسية للأحوال الابتدائية.

(د) جذور فكرة الحساسية للأحوال الابتدائية لپوانكريه وماكسويل... وذلك لأربى فيك الاستثارة من أى عمل رياضى قديم أو حديث لتنطلق وتتشجع لإعادة بنائه أو تكملته.

(٢) التدريب على المرونة فى التفكير الرياضى والتوصل إلى المستوى الأمثل. وذلك من خلال عرض طرق مختلفة للتكرار المرحلى لحل نفس المعادلة المركبة التكعيبية ($Z^3 - 1 = 0$) والتوصل إلى أشكال مختلفة بديعة للفراكتالات عند مناطق جذب الحلول. والتأكيد على أن هذه الطرق المختلفة هى طرق عصرية لرياضيين فى ا لتحليل العددى يحاول كل منهم التوصل إلى مستوى أمثل لسرعة التقارب وزيادة درجة التقارب مثلا.

(٣) ابراز تزاوج التحليل العددى (النواحى الجبرية) بالأشكال الهندسية المختلفة الناتجة من استخدام الطرق التكرارية المرحلية المختلفة، ودور التكنولوچيا المتقدمة لرسوم الكمپيوتر والتلوين فى إظهار صور الفراكتالات المرتبطة بها.

(٤) اعطاء الفرصة لتنمية استقلالية التعلم عن طريق التنويه عن مراجع التحليل العددى لمعرفة المزيد عن اجراءات واشتقاق قواعد الطرق التكرارية المرحلية المذكورة.

(٥) إعطاء الفرصة لتتوصل إلى تعميم رياضى كعمل ابتكارى يمر بالمراحل: التحضير - التربيض - التحضين - الالهام - التحقيق عند تقديم الفراكتالات الخاصة بحل معادلات مركبة.

فمثلا لاستثارة تفكيرك قدمت صورة عن حل معادلة مركبة لخمسة جذور: $z^5 - 1 = 0$ ثم التركيز على حل معادلة مركبة تكعيبية بطرق تكرارية مختلفة $z^3 - 1 = 0$ وذلك لاعطاء الفرصة للتوصل إلى البحث عن القيم الصفرية للدالة (أو بالأحرى جذور المعادلة عندما $f(z) = 0$) المركبة بصفة عامة: $f(z) = z^n - 1$ فى المستوى المركب التى لها n من الجذور عند المواقع $e^{2k\pi/n}$ حيث $k=1.2...n$ وبتخمين (البداية) عند النقطة Z_0 وبالتكرار المرحلى تصل إلى أقرب جذر لها Z_k (أو ζ)... وعلى ذلك يقسم المستوى بقطاعات (ن من المناطق). هذه المناطق هى فراكتالات.

(٦) التعود على اللعب بالأفكار والأشكال الرياضية لاستثارة الأعمال الابتكارية وللترويح عن الذهن والتجديد العقلى. وذلك من خلال تقديم تشكيلات نجوم Pentacles بنروز ونجوم ماكلور التى حدودياتها فراكتالات.

(٧) ربط أجزاء (الكرويات - رجل الثلج) عن فراكتالات مجموعةماندلبروت بالتفرعات منها بالدورية للتوصل من أشياء مختلفة غريبة لقوانين رياضية.

(٨) التشويق لمعرفة المزيد عن الهيولية Chaos المرتبطة بتكوين فراكتالات الجاذب الغريب ومنها الفراكتالات المرتبطة بحلول المعادلات المركبة بالطرق التكرارية المرحلية.

والآن حاول استكمال ما سبق وتوظيفه لتنمية إبتكارك التدريسى فى مواقف مشابهة أو مغايرة.

المراجع

١- باري باركر (ترجمة علي يوسف علي) (٢٠٠٢): «الهيلولية في الكون» القاهرة - المجلس الأعلى للثقافة.

٢ - جيمس جلايك (ترجمة علي يوسف علي) (٢٠٠٠): «الهيلوليه تصنع علمًا جديدًا» - القاهرة - المجلس الأعلى للثقافة.

٣ - أ.د/ نظلة حسن أحمد خضر (٢٠٠١): «أصول تدريس الرياضيات» - الفصل الأول - القاهرة - عالم الكتب ط/ ١٠.

4- Drazin, P.G. (1998): "Non linear Systems" Cambridge Univ. Press.

5 - Gelbrich, G. & Giesche. K (1998): "Fracral Escher Salamenders and other Animals". The Mathematical Intelligencer Vol 20 no 20 New York, Springer Verlag pp 31 - 35.

6 - Gleick, J. (1987): "Chaos: Making a New Science" New York: Viking Press.

7 - Hafner, C (1999): "Post - Modern Electromagnetics Using Intelligent Maxwell Solvers: "Egland - John Wiley pp 42 - 83.

8 - Maganzini, c (1997): Cool Mathemetics' U.S Price Stern Sloan Iuc.

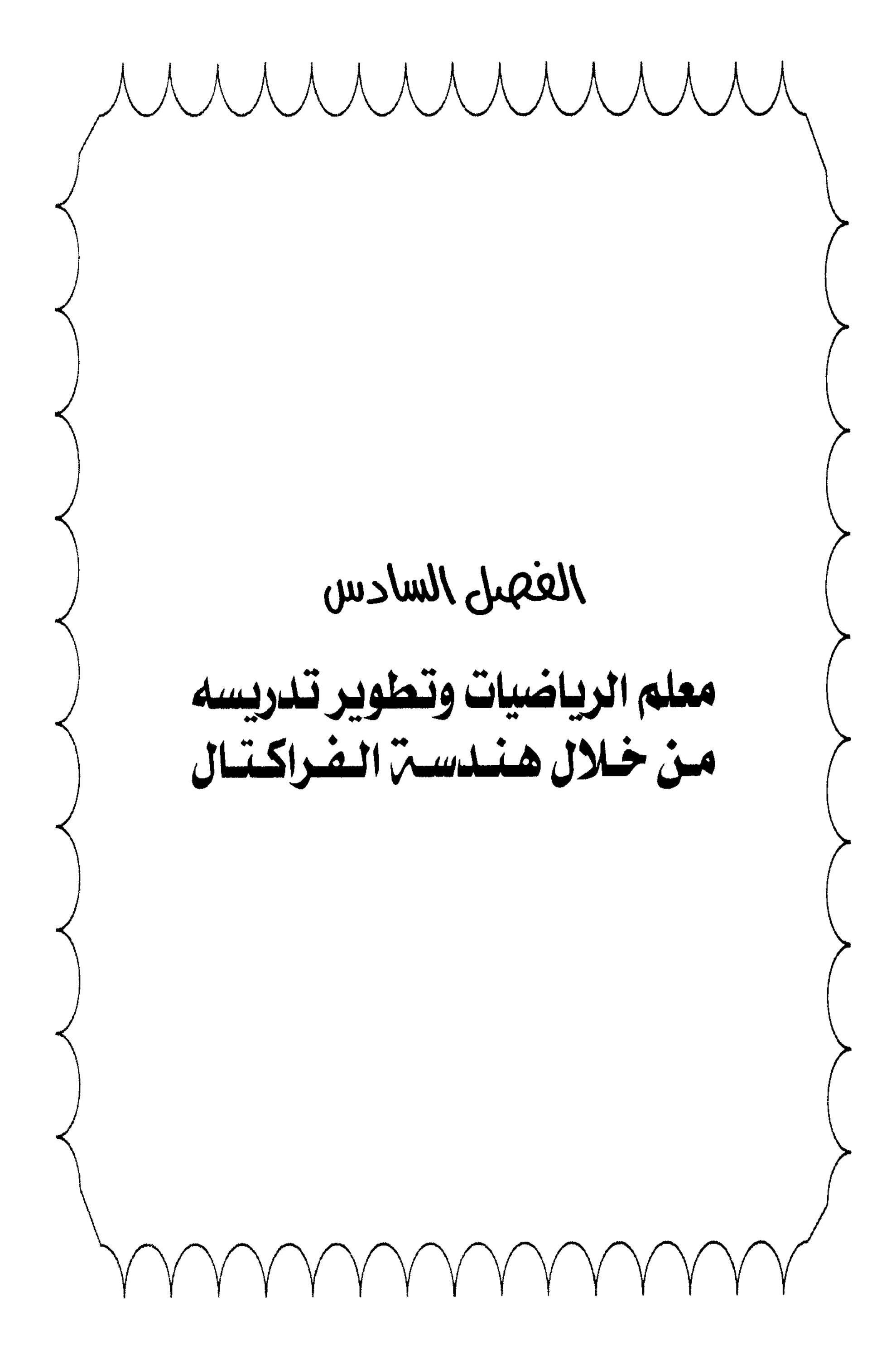
9 - Mcclure, M: Digraph Self - Similar Sets and Aperiodic Tiling" The Mathematical Intelligencer, Vol 24 No 2 , New York, Springer Verlag pp 33 - 41.

10 - Thomas, D.A (2002): "Modern Geometry" U.S. Brooks/ Cole Thomas Learning.

11 - Thompson, J.M.T & Stewart, H.B. (2002): None linear Dynamics and Chaos" England, John Wiley/ 2nd ed.

12- Varona, L.J (2002): "Graphic and Numerical comparizon between Iterative Methods": The Math Intel. Vol 24 No 2, New York Spriger. Verlag pp 39 - 45.

13 - Viana, M (2002): "whats New on Lorenz Strange Attractors". The Math Intel. Vol 22 No2 pp 4 - 19 New York, Springer Verlag.



الفصل السادس

معلم الرياضيات وتطوير تدريسه من خلال هندسة الفراكتال

الفصل السادس

معلم الرياضيات وتطوير تدريسه من خلال هندسة الفراكتال

مقدمة:

فى الواقع يعد تراجع أعداد الطلبة (والطالبات) الدارسين للرياضيات فى المرحلة الثانوية بصفة خاصة وتدنى مستوى الرياضيات للتلاميذ بصفة عامة، مؤشراً خطيراً ينذر بالتخلف الحضارى والثقافى. وهذا يستدعى وقفة حاسمة لإعادة الثقة بالرياضيات لمعالجة جفاف الرياضيات بالمقرارات والكتب المدرسية بالمراحل المختلفة. ويرجع جفافها لاعتمادها (خاصة بالمرحلة الثانوية) على الصرامة الرياضية والتخصصية والشكلية على حساب المعنى أو الفائدة التطبيقية أو دلالتها فى الحياة العصرية.. أو عدم إثارتها للخيال والإبتكار.

هل يمكن للمعلم الأستعانة بأفكار وملامح هندسة الفراكتال فى معالجة هذا العيب وذلك بتحبيب التلاميذ فى الرياضيات وإثارة دوافعهم للتعلم الاستقلالى فى تعلم الرياضيات مدى الحياة بإستمتاع وحب وتقدير ولتحفيزهم للمساهمة فى صنع المعرفة الرياضية وتطبيقاتها ؟! ولهذا سوف أحاول مساعدة المعلم فى الاستفادة من قراءة الفصول السابقة حول هندسة الفراكتال فى تطوير تدريسه للرياضيات المدرسية ليكون تعلمها أكثر متعة وإثارة للخيال والإبتكار، وتصبح ذات معنى وصلة بكافة فروع المعرفة، وقريبة منهم ومن عالمهم المعاصر. وذلك بإنتقاء أفكار منها وحول نشأتها ونموها وتطعيم تدريسه بها أو للاثراء المعرفى الرياضى للتلاميذ أو بتجديد الأنشطة الرياضية لهم. وكذلك بتطبيق ما تثيره ملامح وخصائص هندسة الفراكتال فى تحسين تدريس الرياضيات المدرسية. هذا وقد استخدمت فى عرض محتوى الفصول السابقة مداخل وأساليب لتنمية الابتكار التدريس بصفة عامة لمعلم الرياضيات أشرت إليها فى التعقيبات على هذه الفصول.

إلا أننى هنـا أحاول إتاحة الفرصة لـلمعلم لأن يكون سـيد نفسه فى توليد حافز داخلى يقتنع فيه بأهمية معرفته لـهندسة الفراكتـال ليتخذ موقفـاً إيجابيا من تـعلمه وتعليمه لها. ومساعـدة المعلم للتعرف على كيفية استفادته منها ومن خصائـصها (ملامحهـا وأفكارها..) ليجعل الـرياضيات المدرسية أكثر حيوية، أكثر معلـوماتية، أكثر إتاحـة، أكثر واقعية، أكـثر حداثة up to date كما نـوضح فى بنود هذا الـفصل الذى نختتم به الباب الثانى.

٦ - ١ - معلم الرياضيات وموقفه من هندسة الفراكتال

المعلم هو الـذى يستطيع تحديد استفادته من معرفته بـهندسة الفراكتال فـى تنمية ثقافته الرياضية المتجددة والمهنية وفى تحسين تدريسه. فهو الوحيد الذى يقدر مدى ما تأثر به وما تفـاعل معه بعقله أو بإحسـاسه أو بعمله أثناء قراءته ودراسـته لها، ويريد مشاركـة الغير فيـما جذب انتباهه وشوقه وأمتـعه وحيره فيـها من زملائه وتـلاميذه وأقرانه وأهله... ويساعده فى ذلك إعادة القراءة والدراسة مرة أو مرات أخرى لزيادة الفـهم وليـكون انطـباعات وانـعكاسـات وتأمـلات تحدد موقـفه من هـذه الهنـدسة العـصريـة. ثم يستغـل موقفـه منـها فى تـوجيـه اهتمـاماتـه إما بدراسـة المزيـد عن الموضوعات التـى قدمناها فى الفصول المختـلفة بقصد التعلـم الاستقلالى autono-mous learning أو فى إتاحة الفرصة لتلاميذه وزملائه... للتعرف عليها ودراستها، من خلال إنـتقائه لـلأفكار والخصـائص.. التى يـشعر بأهـميتهـا فى جذب وتحبـيب تلاميذه فيـها ثم ينطلق من ذلـك إلى توظيفها فى خـدمة تحسين تدريسه. وفـى تربية جيـل بعقلـية رياضيـة إبتكاريـة واسع الاطلاع لكـل جديد فى الـرياضيات، عـاشق للرياضيات ومتعلق بـجمالها ومقدر لعظمتها وفائدتها، مثاراً بـدوافع داخلية لتحقيق ذاته وللمشاركة فى نمو المعرفة الرياضية وتطبيقاتها.

ومن الاتجـاهات المعـاصرة التـى ينادى بـها الريـاضيون الـتربويـيون فى تـدريس الرياضيات لـلقرن الواحد والعشرين هـو التوصل إلى طرق مجددة تعـمل على حل مشكلة : كيف تكون الرياضيات المدرسية أكثـر حيوية، أكثر معلوماتيه، أكثر واقعية، أكثر إتاحة، أكثر حداثة.

وأعتقد أن هندسة الفراكتال بما تتمتع به من خصائص وملامح يمكن أن يكون لها دور رائد فى حل هذه المشكلة. ومن ثم فإننى أقدم فيما يلى توظيف هندسة الفراكتال وأفكار تثيرها خصائصها وملامحها لمساعدة المعلم فى هذا الصدد.

٦ - ٢ - توظيف هندسة الفراكتال فى جعل الرياضيات المدرسية أكثر حيوية more live

تكون الرياضيات أكثر حيوية (أو حياة) عندما يشعر التلميذ أنها : (أ) أقرب للطبيعة nature والحياة تفسرها وتنمو من خلالها ومن خلال التأمل والتدبر فى الطبيعة والكون (ب) أنها كائن يتميز بالديناميكية (الحركة والتغير) dynamics (جـ) أنها إنسانية ليس فقط بمدلول روبين هيرش ولكن لأنها تخاطب العقل والقلب والمشاعر والإحساس والخيال، بالإضافة إلى أن لها لمسات فنية وجمالية تدعو إلى الإنجذاب والتعلق بها.

والآن أدعوك أيها المعلم القارئ أن تجوب بخاطرك تجمع شتات ما قرأته للفصول السابقة لتؤيد أن هندسة الفراكتال مثال لرياضيات أكثر حيوية بتحقيق النقط السابقة. ستجد نفسك توصلت إلى الكثير ومنها ما أوضحه فيما يلى:

٦-٢-١: توضيح أن هندسة الفراكتال أكثر حيوية

أ- **هندسة الفراكتال أكثر حيوية لأنها أقرب للطبيعة والحياة**؛ ويتضح ذلك مما يأتى:

- ارتبطت نشأة هندسة الفراكتال من التأمل فى أشكال السحاب ، والأشجار، الشواطىء ... البحر... البرق كمحاولة لوصف كثير من الأشكال فى الطبيعة التى عجزت عنها الهندسة الاقليدية.

تعدد الأمثلة لفراكتالات فى الطبيعة توضح التماثل الذاتى مثل مقطع فى ثمرة القرنبيط - تفرعات الأغصان - تفراعات نهر وروافده - تفرعات الأوعية الدموية- تفرعات القصبة الهوائية - تفرعات جذور النبات... - انبعاجات سطح المعادن - تعرجات شاطئ بحر .. ريش طائر - قمم أشجار - قمم جبال.

- ارتبط نمو وبلورة هندسة الفراكتال بحل مشكلات لظواهر طبيعية كانت تغفل من قبل فى الإتصالات، التنبؤ بالطقس، البيولوجى، حركة مياه البحر نواحى

الشاطئ، فى الكون والأجرام السماوية (الفلك) .. وذلك عن طريق اكتشاف الـهيولـيةchaos (أو جوازاً الفوضى) كمفهوم (وظاهرة) نشا مرتبطا بهندسة الفراكتال ثم نما كعلم مستقل معاصر.

- تدعو هندسة الفراكتال إلى التأمل والتفكر فى الطبيعة ولذا سميت بهندسة الطبيعة فى بادئ نشأتها .

ب - هندسة الفراكتال أكثر حيوية باعتبارها كائن يتميز بالديناميكية (الحركة والتغير) Dyuamics

مما يميز أى كائن حى هو تركيبه الداخلى الذى يحافظ على خصائصه الفريدة، وحركته الدائبة حتى ولو يبدو ساكناً. حتى الحجر يمكن اعتباره كائنا حياً ما دام محافظاً على هيكله. وعلامة شيخوخته وفنائه تظهر عندما يتفتت من تلقاء نفسه. وقد حدث هذا عندما تفتت أجزاء من أحجار أبو الهول sphinx فكان ذلك مؤشرا أسرع العلماء بمعالجة بقية الأجزاء بمواد تحافظ على حياته. هذا الحجر الساكن يتحرك داخله بلايين الجسيمات فى ذراته. وقد يكون الهيكل محسوسا له حيز فى الفراغ أو غير محسوس ومتغير الا أنه يحافظ على خواصه مثل الهواء (والغازات) وحركته (البراونيه).

أما بالنسبة لهندسة الفراكتال فيمكن توضيح ديناميكاياتها (الحركة والتغير) من خلال:

تتجلى الحركة الدائبة للنقط وتراقصها عند الحدود بعشوائية ولا نظام قبل أن يبرز من خلالها فى بطئ وشيئا فشيئا فراكتالات الجاذب الغريب مثل:

(١) تصرفات الدوال المركبة complex للنقط القريبة من جذور معادلاتها (أو أصفار الدالة) وحركاتها dynamism عند حدود الأحواض كنتاج لحركات عشوائية لا نظامية كما تظهر شيئا فشيئا فراكتالات من بين تحرك دائم لمثل هذه النقط العشوائية (على شاشة الكمبيوتر).

(٢) تصرفات الدوال المركبة التربيعية بتحديد قيم معينة للبارامتر يجعل المسار فى مجموعة التنافر متصلاً، يؤدى إلى تكوين الأشكال البديعة الساحرة من خلال

ظهور وتحرك نقط عشوائياً (وكأنها الحركة البراونيه للغازات) ولا نظامياً. هذه الأشكال البديعة الساحرة التى تظهر رويداً رويداً هى فراكتالات مجموعة ماندلبروت ومجموعات جوليا حيث نجد النقط عند الحدود كأنها كائنات محتاره هل تتحرك نحو الفراكتال أو خارجه عنه ؟ وتأخذ وقتاً طويلاً حتى تحدد موقفها.

(٣) استخدام نظام الدوال التكرارية المرحلية IFS فى توليد فراكتالات تحاكى الطبيعة مثل ريشه طائر مثلا. حيث يتيح الكمبيوتر الفرصة لمشاهدة الشكل دائب الحركة والتغير فى التكرارات المرحلية النهائية حتى ظهور شكل الريشة من بين النقط العشوائية اللانظامية.

(٤) استخدام برمجيات الصور المتحركة مع توليد الفراكتالات التى تحاكى الطبيعة تعطى حياة على المناظرالطبيعية (الفرضيه virtual) والظواهر الطبيعية التى تصاحبها. سواء فى استخدامها فى أفلام الكارتون أو فى دراسة وتمثيل الظواهر الطبيعية.

جـ - هندسة الفراكتال أكثر حيويه لأنها أكثر إنسانية. ويتضح ذلك مما يأتى:

- بمدلول روبين هيرش فإن هندسة الفركتال تكون إنسانية لأن الرياضى الانسان هو الذى اخترعها، ولأنها اجتماعية بمعنى أن مجموعة من الرياضيين ساهموا فى تنميتها أو نتجت من أفكار رياضيين فى عقود مختلفة سابقة وحالية. مثل اعتماد هندسةالفراكتال على أعمال چوليا (ومجموعاته) وأعمال كانتور (ومجموعته) وأعمال هاوسدورف(وبُعد الصندوق الذى قدمه).. وأعمال لورنز (وظاهرة الفراشة التى أثارها جاذبة الغريب). كما إعتمد الرياضيون والعلماء على هندسة الفراكتال فى ابتكار هندسات وعلوم عصرية جديدة مثل هندسة حدوة الحصان للرياضى سمال Smale ونظرية الهيوليه chaos .

- بالإضافة إلى ذلك فهندسة الفراكتال تخاطب العقل والمشاعر والخيال والأحاسيس وتتفاعل معها. فبساطة الرياضيات التى تولد الفراكتالات تبهر العقل ، وجمال الفراكتالات (المضبوطة) فى الرياضيات لها جمال نستشعره فى العقل.

وأيضا IFS يعتمد على أفكار بسيطة للتحويلات الهندسية الانكماشية فى فراغ المتجهات (الخطى) تجعل العقل يألفها. إلا أن عدم اعتماد ماندلبروت على المعالجات الرياضية الصارمة لا ترضى عقل الرياضيين الشكليين. بينما التحقق من أعماله بواسطة الكمبيوتر يجد الرياضيون التطبيقيون وشبه العمليين جمال عقلى فيها.

- الأشكال البديعة لفراكتالات مجموعة ماندلبروت ومجموعات جوليا وفراكتالات حلول المعادلات المركبة والجاذبات الغريبة الأخرى ، استطاع الكمبيوتر بتكنياته الحديثة فى الرسوم والألوان والزوم أن يبرز جمالها الأخاذ فتشعر بجمالها فى القلب والوجدان كلوحات فنية فريدة تتوه فيها بمشاعرك وخيالك وتحتار فى جمال تشكيلاتها وكأنها لكائنات وأزهار متحركة مليئة بالحياة. فمثلا ارجع وتأمل مجموعة جوليا (شكل (٦) ، الفصل ٣) ، هل تتصور أنها إبداع (ابتكار) رياضى وليس تكوين فنى لأشياء طبيعية وتجريدية.

- لوحات بولاك لفراكتالات تعكس إحساسه لايقاعات الطبيعة تستأثر العقل والإحساس والقلب بجمالها وغرابة تكويناتها.

- اشتراك الفنانين مع الرياضيين واضعى برمجيات الفراكتال أنتج لوحات فنية بالكمبيوتر على شاشته أو يمكن طبعها، لها مذاق جمالى مميز وغريب وفريد. يمكن تصنيفها تحت أنواع من فنون الرسم المعروفة.

- محاولة تكوينك فراكتالات مشهورة (مثل فراكتال كوخ لرقائق الثلج، فراكتال بينو، فراكتال سبيرنيسكى ..) عن طريق المولد بالتكرار المرحلى، تجدك تقوم بعمل شئ مشوق تشعر بالإثارة والسعادة فى نجاحك فى تكوينه شيئا فشيئا فى التكرار المرحلى الثانى والثالث. وتشعر أنك قمت بعمل شئ خاص بك . وتجدك تتطلع لعمل فراكتالات من مولد آخر من عندك. وهذا مدعاة لتنمية مقدراتك الابتكارية أيضاً.

- من إعجابك بجمال الفراكتالات أو لوحات من الفراكتلات.. ربما تود أن تكوِّن هوايه لتجميع collection أشكال فراكتالات فى الطبيعة... لوحات فنية

مستوحاه من فراكتالات. أعمال قمت بها حول هندسة الفراكتالات- معلومات - أفكار...

وذلك على غرار هوايه جمع طوابع البريد أو الأحجار الطبيعية أو العملات النقدية... فتكامل المعرفة مع العمل مع الأحاسيس والخيال هى أساس العمل الإبتكارى المشوق. بالإضافة إلى أن ذلك يدفعك لتكوين هواية التجميع التى تقوى اعتزازك بما تعمله وتتعلمه كشئ خصوصى لك.

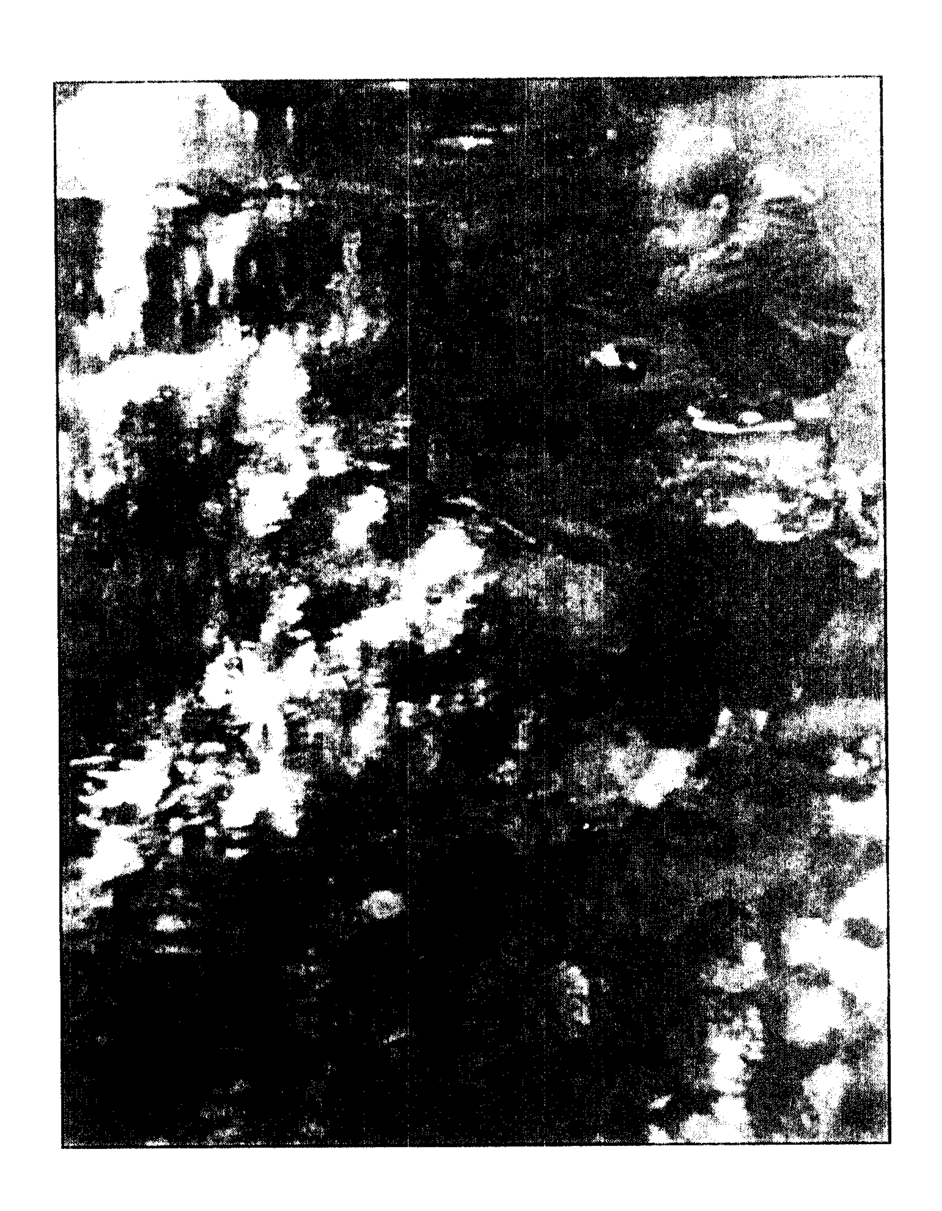
والآن تعال نستفيد من طبيعة هندسة الفراكتال الحيوية فى جعل الرياضيات المدرسية أكثر حيوية، بعرض بعض الأفكار الارشادية فيما يلى.

٦-٢-٢: استفادة معلم الرياضيات لجعل الرياضيات المدرسية أكثر حيوية.

يمكنك الأستفادة من الملامح التى تجعل هندسة الفراكتال أكثر حيوية فى الاسترشاد بها لجعل الرياضيات المدرسية أكثر حيوية وذلك بجعلها أقرب للطبيعة، وديناميكية وإنسانية كما نوضح فيما يلى:

أ- كيفية جعل الرياضيات المدرسية أكثر حيوية عن طريق ربطها بالطبيعة.

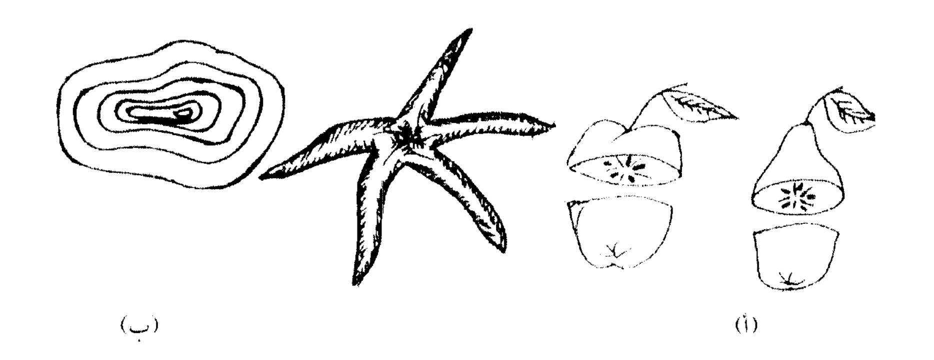
الطفل - الإنسان .. جزء من الطبيعية يجد نفسه فيها وبالقرب منها ويحب كل ما يقربه منها. التأمل فيها يحفر فى ذاكرة (الطفل) صورة عن العالم المحيط به يعدل فيها بخيراته ويتعلم منها [عن طريق عمليات الاستيعاب (التمثيل فى الذاكرة) والتطويع - كما يقول بياجيه] . أنظر شكل (٥١) لطفل غارق فى التأمل لكائنات ونباتات وحركة دائبة على سطح الماء وأسفله. من بديع صنع الخالق.



وعلى ذلك فيستحسن أن يستغل المعلم ذلك عند تقديمه لأى أفكار رياضية ابتدائية بسيطة أو متقدمة، فيربطها بالطبيعة أو معلومات عن الطبيعية مع إعطاء الفرصة للتأمل والتدبر فيها كمنبع للأفكار الرياضية. فمثلا:

(١) عند بداية تعلم الطفل الأعداد من المشوق ربط كل عدد بما يمثله فى الطبيعة حوله وفى جسمه وفى الكائنات مباشرة أو من خلال التفتيش والبحث عنها فى الصور والمصادر الأخرى ومساعدة الطفل على الاستكشاف والاستقراء من مجموعات متكافئة مختلفة كل الاختلاف فى طبيعتها وأشكالها:

- ربط الواحد بالشمس الواحدة، القمر الواحد، القرن الواحد لوحيد القرن، المنقار الواحد للعصفور الأنف الواحد للطفل......
- ربط الاثنين بالعينين، والأذنيين، والرجلين للطفل، وجناحى طائر، وجناحى فراشة....
- ربط الثلاثة بخصلات ضفيرة الشعر، بأصابع بعض الطيور، بأصابع بعض الحيوانات (كالفيل)...
- ربط الأربعة بأرجل بعض الحيوانات، بحجرات القلب، بصوابع رجل التمساح...
- ربط الخمسة بأصابع يد الطفل ورجله، بالسمكة النجمية.. ومن الممتع أن يستكشف الطفل أن مقطع أحد الثمار للفاكهه مثل الكمثرى تحتوى على خمس فتحات للبذور أنظر شكل (٥٢ أ). وإذا كانت المدرسة فيها أو فى مكان قريب منها مزرعة فواكه نعطى له الفرصة ليتأمل أشجار الفواكه التى نأكلها ويتأمل أزهارها فيجد كل زهرة تتكون من خمس وريقات(بتولات) وعندما تنضج الثمرة تتحول إلى ورقات خضراء أسفل الثمرة[٧].... وهكذا.



شكل (٥٢)

أما الصفـر فيمكن ربطه مثـلاً بثعبان ليس لـه أرجل أو سمكة ليس لهـا منقار أو طائر ليس له زعنفة.. ويأتى الضرب فى الصفر عن طريق عدد أرجل فى ثعبان

٠ × ١ = ٠، وعدد أرجل فى ثعبانين ٠ × ٢ = ٠ .... وهكذا.

(١) عند تـقديم الكسور يـمكن ربط الكـسر ١\٣ بنسبـة اليابس والماء علـى سطح الكـرة الأرضية، وهى نـفسها الـنسبة بـين الأجزاء الصـلبة والسـائلة فى جـسم الإنسان..

(٣) عند تقـديم الأعداد الموجهة الصـحيحة يمكن ربطـها بمعلومات عن قـمة أعلى جبل وعمق شاطئ بحر، مثلا قمة إفرست ٨٨٤٨ م أعلى سطـح البحر وعمق شاطئ البحر الميت ٤٠٠ م تحت سطح البحر.

(٣) عند تقديم الدالة التربيعية يمكن ربـط شكلها البيانى بمسار حركة دولفين أو ماء من نافورة أو فك أسنان...

(٤) عند تقديم الدوائر المتحدة المركز يمكن ربطها بمقطع ساق شجرة كشكل تقريبى (شكل (٥٢) ب)

(٥) ربط النظام العدى الثنائى بالانقسام الثنائى للأميبا.

(٦) ربط الأعداد الـكبيرة بعدد الـثوانى فى السـنة، وبعد الشمـس عن الأرض وعن الكواكب الأخرى...

(٧) ربط المعادلات التفاضلية بنماذج منحنيات النمو والاخماد والنموذج اللوجستى [للبلجيكى فيرهيلست].

هذا ويمكنك الاستعانة بمعلومات فى كتب البيولوجى، وفى الانسكلوبيديات) ومن مواقع من الطبيعة فى الأنترنت وربطها بالأفكار الرياضية التى تقدمها...

ب - كيفية جعل الرياضيات المدرسية أكثر حيوية بإثارة وتوضيح الديناميكية (الحركة والتغير).

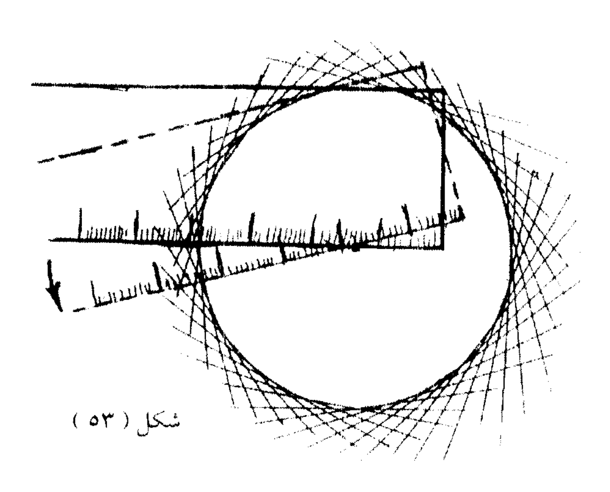
أول ما يتبادر إلى الذهن هو تطعيم تدريس الأعداد المركبة وحل المعادلات المركبة ببعض ما قدمناه عن حلول المعادلة $Z^3 - ١ = 0$ والدالة التربيعية $Z \rightarrow Z^2 + C$ واستخدام الكمبيوتر فى توضيح ديناميكيات تصرف النقط بالقرب من جذور المعادلة أو حدود الدالة التربيعية ،والهيوليه chaos التى تسبق ظهور فراكتالات جذور المعادلة أو مجموعة ماندلبروت ومجموعات جوليا.

فى الواقع كان الدافع وراء إختراع الرسوم المتحركة الكمبيوترية للعالم الرياضى والفنان والموسيقى المعاصر بلن Blenn هو جعل الرياضيات ممتعة فى تعلمها وفى فهمها. حيث حرك دافعيته كتاباً يحوى رسوم كاريكاتيريه قرأها فى شبابه جعله يفهم النظرية النسبية. وعلى ذلك فالإحساس بالحركة والتغير يزيد من متعة المتعلم بحيويه ما يتعلمه.

والواقع أن الاحساس بالرياضيات ككائن متحرك يمكن أن تنميه ليس فقط عن طريق تحرك الأشكال بالتحويلات الهندسية أو عن طريق العمليات الانشائية ورسم المحل الهندسى. وأيضا عن طريق تنمية الاحساس بتحرك النقط أثناء رسم الأشكال الهندسية والبيانية سواء بأدوات الرسم العادية أو بالرسم والحركة بالكمبيوتر، وأيضا عن طريق التجزئ والتشكيل dissection وتكوين الأشكال .. فمثلاً:

(١) عند رسم قطعة مستقيمة (أو شكل هندسى بسيط) نتيح الفرصة للطفل (المتعلم) أن يستشعر حركة سن القلم محاذياً للمسطرة كأنه يحرك نقطاً مستقيمة متعاقبة.

(٢) عند زيارة الملاهى نتيح الفرصة للطفل مشاهدة العجلة الدائرة الرأسية قبل الركوب وهي ساكنة ثم وهى تتحرك وتزداد سرعتها كتمهيد لرسم الدائرة من نقط متحركة. وكذلك كتمهيد لتحويل الدوران. كما نوحى له وهو يرسم الدائرة بالبرجل كأنه يعبر النقط المتحركة حول محيطها أثناء الرسم أو يمكن رسم الدائرة كغلاف لمستقيمات باستخدام مسطرة متحركة تمس نقطة من جانب وترسم قطعة مستقيمة من جانب آخر شكل (٥٣).


شكل (٥٣)

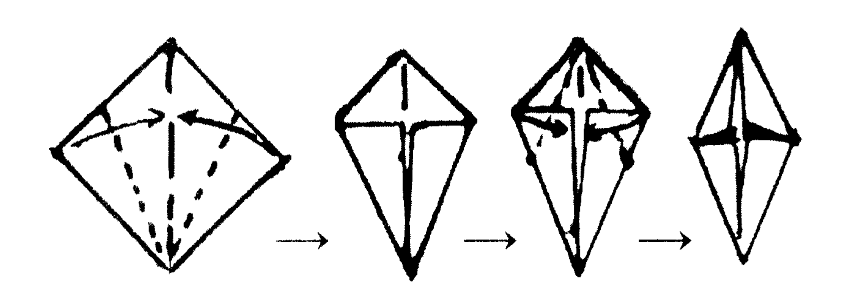
(٣) عند رسم الدالة الخطية نعطى نفسي الانطباع للنقط المتحركة التى يرسمها القلم فى تعاقب لتمثيل الدالة بيانيا. وعند رسم الدالة ص = م س + ١ أو ص = س+جـ بتغيير قيم البارامتر م نوحى بالتحرك الموازى للمستقيم، وبتغيير قيم البارامتر جـ نوحى بالتحريك الدورانى للمستقيم.

(٤) عند رسم الدالة التربيعية ص = أ س٢ نوحى بتحريك فرعى القطع المكافئ من قرب إلى بعد بتغيير قيم البارمتر فى كل حالة من كسر موجب أقل من ١، ثم أعداد صحيحة موجبة وكذلك بالنسبة للدالة الأسية ص = أ^س^ وتغيير قيم البارامتر أ وهكذا.

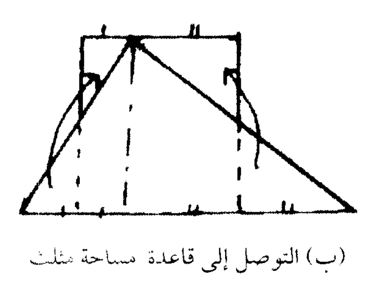
(٥) عند عمل الأشكال الهندسية المجسمة من شبكة (تفريد) مستويه (كشبكة مكعب من ست مربعات، يمكن توضيح الحركة من خلال الرسم (كمجموعة متحركة للنقط على حدود الشبكة) ومن خلال الطى واللصق فى عمل الجسم. وكذلك يمكن توضيح الحركة عند استخدام نماذج تجزئ الهرم وإعادة تركيبه.

(٦) يمكن استخدام التجزئ والتشكيل فى توضيح قاعدة مساحة شكل أو نظرية (مثل نظرية فيثاغورث) لاثارة التغير والحركة كخاصية أساسية فى تكوين الأشكال الرياضية شكل (٥٤) أ.

(٧) استخدام طى وثنى وفرد الورق فى عمل أشكال هندسية أو التوصل لعلاقات رياضية بالقص واللصق يوضح أيضاً الديناميكية (والاحساس بالتغير والحركة) شكل (٥٤) ب.



(أ) عمل معين من طى ورقة مربعة



(ب) التوصل إلى قاعدة مساحة مثلث

شكل (٥٤)

(٨) الاستعانة بوسائل Geometric Sketch pad , Gava Sketch pad الإلكترونية تظهر ديناميكية النماذج الهندسية بالكمبيوتر.

وعموماً البرمجيات لتحريك الأشكال الهندسية أو التى تظهر الحركة فى تكوينها أو عرضها تضفى مزيداً من الديناميكية التى تؤدى إلى مزيد من الاستمتاع فى التعلم.

جـ - كيفية جعل الرياضيات المدرسية أكثر حيوية بجعلها أكثر إنسانية.

تمشياً مع ماقدمناه لتوضيح أن هندسة الفراكتال أكثر إنسانية، فإن جعل الرياضيات المدرسية أكثر إنسانية مثلها يأتى عن طريق إتاحة الفرص للتلميذ (المتعلم) أن يصنع ويعمل الرياضيات بمفرده أو بالاشتراك مع غيره،وان يشعر أن الرياضيات تخاطب عقله ووجدانه وإحساسه وخياله بما يدفعه لتعلمها وليتذوق جمالها فى العقل والقلب.

وعلى ذلك فالطرق التى تساعد على الإكتشاف والإبتكار كالطريقة المعملية.. أو طريقة مساعدة الأقران أو التعلم التعاونى تساهم فى تنمية شعور المتعلم بأن الرياضيات إنسانية لأنها من صنع الإنسان، وهى إجتماعية يشترك فى صنعها أكثر من فرد.

أما جعل الرياضيات المدرسية ممتعة للعقل والوجدان فيكون عن طريق توجيه الأهتمام والتشوق لجمالها الظاهر فى أنماطها العددية والهندسية، بالاضافة إلى توفير الفرص لمساعدة المتعلم على النجاح فى والاستقراء واكتشاف مفاهيمها وأفكارها من هذه الأنماط. كذلك توجيه الاهتمام إلى جمالها الباطن فى استدلالاتها ومنطقتها وقوانينها، واستخدام المداخل التى تبسط الرياضيات تتيح للمتعلم استيعابها بحب وتقدير.

الاحساس بالجمال الرياضى يمكن تنميته أيضا عن طريق الاحساس بعبق الماضى الذى يختص بإعادة ذكرى من ساهموا فى صنع (ابتكار) بعض موضوعات الرياضيات المدرسية وحكاياتهم حول نشأتها. وأيضاً عن طريق ربط الرياضيات بالفنون (الموسيقى التى كانت جزءاً من الرياضيات حتى القرن ١٦ ثم استقلت عنها،

الرسم، النحت، الزخرفة، الزخرفة القديمة لقدماء المصريين والزخرفة الاسلامية والزخرفة الحديثة ....

وعموماً فالأنشطة الرياضية تسهم مساهمة كبيرة فى تنمية الرياضيات الانسانية وذلك لما تتضمنها من ألغاز محيرة، وألعاب، وأنماط، وتشكيلات، وأعمال مبهرة مشوقه للرياضيين (كما سوف نوضح فى الجزء الثانى بإذن الله: معلم الرياضيات وتجديدات فى الأنشطة). كما أن التطبيقات الحيوية (غير المصطنعة) الحقيقية والمشاكل التى تثيرها تتطلب إحساس أكبر فى حلها بالطرق الرياضية الحالية أو المجددة.

٦ - ٣ : توظيف هندسة الفراكتال فى جعل الرياضيات المدرسية أكثر معلوماتيه.

يتميز عصرنا بأنه عصر المعلوماتيه نظراً للانفجار المعرفى والمعلوماتى، والتقدم التكنولوجى الكبير فى أجهزة الكمبيوتر والإتصالات، الذى أتاح التعامل مع تخزين واسترجاع ومعالجة الكم الهائل من البيانات والمعلومات وتداولها وإنجاز الأعمال المتعلقة بالمعلومات بدقة بالغة وسرعة كبيرة . كما أدى التطور الهائل فى أنظمة المعلومات، وأنظمة الخبير expert system التى تعتمد على قواعد معرفية ومنطقيه، إلى محاكات العقل والسلوك الإنسانى للقيام بأعمال وسلوكيات ذكية تخذم مجالات متعددة علمية ورياضية وتعليمية وصناعية وتجارية...

وقد رأينا أنه لولا التقدم التكنولوجى الكبير لنظم المعلومات أو بالأحرى الكمبيوتر ما كانت لتتبلور وتظهر هندسة الفراكتال. من هذا المنطلق نوضح أن هندسة الفراكتال أكثر معلوماتية والأستفادة من ذلك لتصور كيفية جعل الرياضيات المدرسية أكثر معلومايته.

٦-٣-١ : توضيح أن هندسة الفراكتال أكثر معلوماتيه.

نحاول توضيح أن هندسة الفراكتال أكثر معلوماتيه من خلال إبراز اقتران اتضاح وتكوين وتفسير أفكارها وتطبيقاتها بالكمبيوتر (برمجيات + hard ware). وذلك بإعتبار الكمبيوتر بإمكانياته المتقدمة كنظام معلوماتى فمثلا:

(١) تكوين الفراكتالات من المولد بالتكرار المرحلى أو بأنظمة الدوال المرحلية التكرار IFS أو فراكتالات الجاذب الغريب يمكن إظهارها وتوضيح عملية تكوينها عن طريق الكمبيوتر.

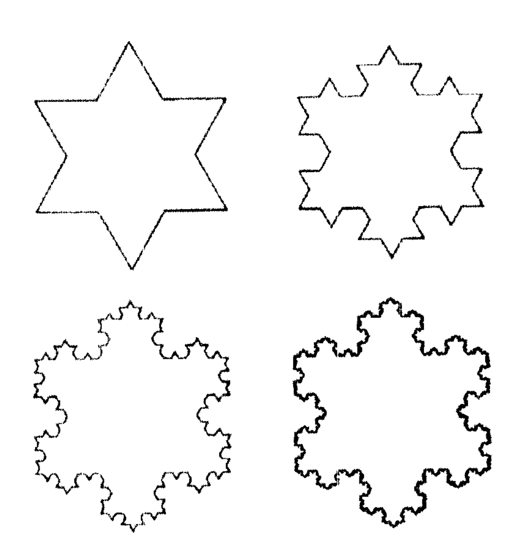
(٢) إمكانات الكمبيوتر المتطورة استطاعت إظهار الفراكتالات البديعة: مجموعة ماندلبروت. مجموعات جوليا. وفراكتالات حلول المعادلات المركبة خاصة التكعيبية.

(٣) يمكن عمل برامج كمبيوترية بأسطر قليلة لإنتاج الفراكتال مثل:

برامج بلغة اللوجو لعمل فراكتالات مشهورة أنظر شكل (٥٥) برنامج لعمل فراكتال (منحنى) كوخ لرقائق الثلج.

- برنامج لعمل فراكتال (مجموعة) جوليا بلغة البيسك انظر شكل (٥٦) الذى ينتج الشكل (٦) بالفصل الثالث.

- برنامج لعمل فراكتال (مجموعة) ماندلبروت بلغة البيسك أنظر شكل (٥٧) الذى ينتج الشكل (٧) بالفصل الثالث.



Logo Code	Comments
to flake : n pu ht rt 60 bk 90 It 30 pd make "* 1 repest: n [make " * 3*:* make "1200 / :* repeat 3 [Ifelse :n = 0 [fd:I] [line : n : I] rt 120] pu home pd setfc : n fill end to line : n : I ifelse : n = 1 [fd :I it 60 fd:1 rt 120 fd : I It 60 fd : I] [line n: - 1 :1 It 60 line :n-1 : rt 120 line : n -1 : I It 60 line : n - 1 : I] end	The name of the main procedure is to flake :n. The notatiin : indicates a variable requiring a keyboard input, entered as flake 1, flake 2, flake 3, and so on. The length of the original segment is set by make "I 200 / : * The original triangle is drawn by repeat 3 [ifelse : n = 0 [fd:I] [line : n : I] rt 120] Do not insert a carriage return in this line. The body of the procedure to line :n :I is a single line.Do not insert carriage returns at the end of first, second, or third lines.

شكل (٥٥) برنامج بلغة اللوجو لتكوين فراكتال (منحنى) كوخ لرقائق الثلج(٨)

List of the BASIC program JULIA

```
10 XS % = 80: YS % = 128: NIT % = 200 : M = 4
11 REM These specify the numbers of steps for x,y : the maximum number of
   iterations : and the effective size of infinity
20 INPUT "AR. AI". AR , AI
21 REM These are these are the real and imaginary parts of a
30 INPUT " XMIN, XMAX, YMIN, YMAX", XN, XX, YN, YX
31 REM These specify the rectangle of the complex plane for z = x + iy
40 MODE 0
50 GAPX = ( XX - XN ) XS % : GAPY = (YX - YN ) / YS %
51 REM These evaluate the steps for x and y
60 FOR NY % = 0 TO YS % - 1
70 FOR  NX % = 0 TO XS % - 1
80 X = XN + GAPX * NX % :Y = YN + GAPY * NY % : COUN % = 0
81 REM This specifies the coordinates of the pixel (in the complex z - plane )
   whose colour must be found next
90    COUN % = COUN % + 1
100 X2 = X X : Y2 = Y Y
110 Y = 2 X Y + AI : x =    X 2 - Y2 + AR
111 REM Lines 100. 110 replace z = x + iy by z^2 + a
120 IF X 2 + Y2 < MAND COUN % < NIT % THEN GOTO 90
121 REM X2 + Y2 = l = l^2
130 C % = 7 COUN % NIT %
140  GCOL 0.7 - C %
141 REM Lines 120 - 140 determine crudely the colour of the pixel according
   to how many iterations COUN % it has taken for / z /^2 to exceed M . a
   rough estimate of infinity.
150 PLOT 69 NX % 8 . NY % 4
160    NEXT NX % NEXT NY %
170 STOP
```

you need to answer the cue (line 20) by typing in the real and the imaginary parts of a to specify the set. The next four numbers specify the Cartesian coordinates of the four vertices of the rectangle in the complex z - plane in which the program will represent the Julia set. You might try, for your first run. to type in 0 . 32, 0.043 and thereafter - 2 ., 2., - 1.5, 1.5, For your second run try typing in - 0. 12375, 0.56508 and thereafter - 2., 2., - 1.5, 1.5. Then you might care to experiment for yourself.

شكل (٥٦) برنامج (جوليا) بلغة البيسك وأسفله ارشادات للتشغيل^(٤)

Table 3 . 5 List of the BASIC program MANDEL

```
10 RS % = 80 : IS % = 128 : NIT % = 100 : M = 4
11 REM These specify the numbers of steps for ar, a, : the maximum number
   of iterations: and the effective size of infinity
20 INPUT " ARMIN, ARMIN. ARMAX, AIMIN, AIMAX" ARN, ARX,
   AIN, AIX
21 REM These specify the rectangle of the complex plane for a = a, + ia,
30 MODE 0
40 GAPR = ( ARX - ARN ) RS % : GAPI = ( AIX - AIN ) IS %
41 REM These evaluate the steps for a, and a,
50 FOR NI % = 0 TO IS % - 1
60 AI = AIN + GAPI NI %
70 FOR NR % = 0 TO RS % - 1
80 AR = ARN + GAPR NR %
81 REM This specifies the coordinates of the pixel ( in the complex a- plane
   ) whose colour must be found next
90 X = 0 : Y = 0 : COUN % = 0
100 COUN % = COUN % + 1
110 X 2 = X X : Y2 = Y Y
120 Y = 2 X Y + AI : X = X2 - Y2 + AR
121 REM Lines 110, 120 replace z = x + iy by z 2 + a
130 IF X 2 + Y2 < M AND COUN % < NIT % THEN GOTO 100
131 REM X2 + Y2 = / z / 2
140 C % = COUN % / 10
150 IF C% = 5 THEN C% = 4
160 IF C % = 6 OR C % = 7 THEN C % = 5
170 IF C % = 8 OR C % = 9 THEN C % = 6
180 IF C % > 9 THEN C % = 7
190 GCOL 0 , 7 - C %
191 REM Lines 140 - 190 determine the pixel colour from the value of
   COUN %
200 PLOT 69, NR % 8, NI % 4
210 NEXT NR % : NEXT NI %
220 STOP
```

TO run tdhe program you need to answer the cue (line 20) by typing in four numbers to specify the Cartesian coordinates of the four vertices of the rectangle in the complex a- plane in which the pro - gram will plot the Mandelbrot set. You might the input - 2 . 25, 2 . 25, - 1.25, 1.25 for a start. and for your next run- 1.23, - 1.1, 0.25, 0.358 to emulate Fig . 3.13.

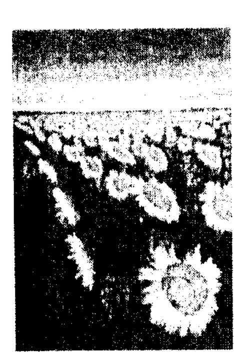
شكل (٥٧) برنامج (ماندل) بلغة البيسك وأسفله ارشادات للتشغيل[٤]

(٤) استخدام فنانين لبرمجيه الفراكتـال أنتج لوحاً فنية متعددة فريدة بذوق عصرى أنظر شكل (٩) الفصل الثالث.

(٥) تطبيقات حيوية لهندسة الفراكتال مثل استخدامها لمحاكاة الظواهر الطبيعية جعلها تسهم فى إمكانية عرضها. وبدونها كانت ستأخذ مكاناً للتخزين كبيراً جداً يستحيل إيجاده حتى فى الأجهزة الحديثة.

(٦) استخدام هندسة الفراكتال فى تكوين الصور الفرضية لخلفيات أفلام القصص الخيالية التليفزيونية والسينمائية. أنظر شكل (٥٨) الذى يبين استخدام هندسة الفراكتال فى عمل بقعة أرض خيالية كخلفية لأحد أفلام الخيال العلمى.





شكل (٥٨) فراكتال بقعة أرض

٦-٣-٢ : استفادة معلم الرياضيات لجعل الرياضيات المدرسية أكثر معلوماتية :

على نفس المنوال الذى وضحنا فيه أن هندسة الفراكتال أكثر معلوماتية، باقتران تكوين مفاهيمها وأفكارها وتطبيقاتها بالكمبيوتر كنظام معلوماتى نقدم بعض التصورات لجعل الرياضيات المدرسية أكثر معلوماتية ، مثل

(١) معظم الكتب المدرسية متوفرة على أقراص CD. Rom . ولو أنها نسخة الكترونية غير مشوقه (ولها عيوب الكتب المدرسية الحالية) الا أن المعلم يستحسن أن يشجع استخدامها.

(٢) الأستعانة ببعض الكتب الأجنبية التى يصاحبها CD. Rom لتوضيح الأشكال وتحريكها واستخدام الزوم ولعرض ديناميكيات عمل النماذج الهندسية ولإمكانية عمل الوصل Link مع مواقع انترنت . بحيث تحوى هذه الكتب موضوعات رياضية لها علاقة بالرياضيات المدرسية.

(٣) تشجيع التلاميذ على إستخدام power point والبرمجيات التى تساعد على تحريك الأشكال والنصوص وإنتاج الرسوم على خطوات.

(٤) تشجيع الزيارة والأستعارة من المكتبات الالكترونية مثل الموجودة فى مراكز سوزان مبارك الاستكشافية والمرتبطة بموضوعات فى الرياضيات المدرسية.

(٥) تشجيع التلاميذ على إنتاج الرسوم الهندسية والأشكال البيانية والأشكال الإحصائية وجداولها باستخدام الكمبيوتر.

(٦) إستخدام مواقع تعليم الرياضيات على الإنترنت.

(٧) تشجيع التلاميذ والزملاء المعلمين على عمل search بالكمبيوتر لموضوع مرتبط بما فى الرياضيات المدرسية.

(٨) تشجيع التواصل مع المعلمين والتلاميذ بالخارج على الدردشة chattaing حول موضوعات وأفكار وأساليب تدريس وعرض الرياضيات المدرسية.

(٩) يوجد العديد من الكتب الأجنبية والمجلات متوفرة على مواقع بالانترنت، يمكن الأستفادة منها فى المجالات القريبة من الرياضيات المدرسية وتدريسها يمكن أن يستفيد منها المعلم ويفيد تلاميذه بها.

٦-٣-٣ : الأستفادة من هندسة الفراكتال فى جعل الرياضيات المدرسية أكثر إتاحة.

يرتبط هذا البند بالبند. السابق وقد ذكرنا فيما سبق (الفصل الثانى) وجود ١٨٠٠ موقع على الأنترنت يخص هندسة الفراكتال منها مئات الكتب في هذه الهندسة. وهذا يعكس أن هندسة الفراكتال أكثر إتاحة access. وبالتالى الرياضيات المدرسية يمكن أن تكون أكثر إتاحة عن طريق التعرف على بعض مواقع الأنترنت

التى تغذيها. وأيضاً توفير المراجع والكتب والمجلات المصاحبة للرياضيات المدرسية، مع تسهيل الاتصالات بالمكتبات المدرسية والثقافية والمكتبات المحلية القومية. وبالإضافة لمواقع الأنترنت التى قدمتها مع مراجع الفصول السابقة أقدم بعض المواقع الأخرى.

- مع ملاحظة أنه يمكن استخدام هذه المواقع بدون كتابة //:http فى البداية.

(١) بعض مواقع على الأنترنت تخص هندسة الفراكتال:

- Bogomonlym A : "fractal curves Dimension"
  http : // cut. theknet . com / do - you - know/ hilbert. html
- fractal coast - lines
  http : // polymer . bu . edu / java / java / coastline / coastline. htm
- Mandlebrot, B., 1982 : The fractal Geamtry of Nature
  http // www. soft ronix . com/

(٢) بعض مواقع على الأنترنت تخص كتب تاريخية واثرائية وتعليمية للرياضيات الدرسية

- http : // www - history. mc. st and . ac. uk/ Hist topics / Babylanion and Egyptian. html
- http : // www. history . mecst - and ac. uk / Mathenematicians / pythogoras . html
- Brundige, E . N. 1996 . The library of Alexandria.
  http : // www. persus. tufts . ed / Greek science/ studets / Ellen / Museum. html
- Abraham, R. H: The Visual Elements of Euclid
  http : // thales. vismath . org / euclid
- http : // www. NCTM. org
- http : // www. math. rice. ed
- The Ontari curricalum, Grades 1 - 8 (1997) Mathematics
  Ministry of Education and training, Ontari
  http : //www. ed . gov . on . ca
- van de walle, J (2001) Elementary and middle school mathematies : Teaching development , 4 Ed Addisan wesley, Longman Newyork , N7

http://mathworld,wdfram.com/leastsquaresfitting.com

http://www,maa.org/Fractals/Welcome.html

http://www.maa.org/Fractals/Panoram/Welcome.html

http://www.mathoorks.com

٦-٣-٤ الأستفادة من هندسة الفراكتال الأكثر واقعية فى جعل الرياضيات المدرسية أكثر واقعية.

ما يقرب الرياضيات من الواقع reality هو أن تجعلها ذات معنى للمتعلم، وذات دلالة عملية ملموسة فى الحياة، وذات نفع (وصلة) فى تطبيقات تمس أرجاء الحياة أو فى التطبيقات الواقعية (غير المصطنعة) فى العلوم والمعرفة. بالإضافة إلى أنها تعيش (ذات دلالة فى) الواقع الحضارى الثقافى.

بعيداً عن الشكلية والطبيعة التجريدية الجافة للرياضيات نجد أن هندسة الفراكتال بالرغم من أنها متحدية challenging ألا أنها بإمكانية إتاحتها وتبسيطها لتكون فى المتناول. بالإضافة إلى تطبيقاتها فى العلوم الأخرى ومحاكات الطبيعة وعمل الصور الفرضية لمحاكاة الطبيعة، وأيضا لطبيعتها الحيوية والإنسانية نجد أن ذلك يبرر أنها أكثر واقعية

ويمكن الأستفادة من واقعية هندسة الفراكتال فى جعل الرياضيات المدرسية أكثر واقعية هو ما قدم فى النقاط السابقة بالإضافة إلى:

(١) العمل على أن تكون للرياضيات معنى للمتعلم. وأركز هنا على على توفير الفرص للمتعلم ليجعل الرياضيات ذات معنى له وبما فى ذهنه فليس بالضرورة آن تكون الرياضيات ذات معنى عند المعلم (أو المؤلف للكتاب المدرسى) أن تكون أيضا ذات معنى للتلميذ الا إذا كان التدريس من القلب والمعلم متعلق بتلاميذه يحس إحساسهم ويفهم بعقولهم.

وفى الواقع يجمع البنائيون constructivist (مثل بياجيه) والسيكلوجين المعاصرون مثل فايجوتسكى Vygotsty هو أن ما يتُعلم هو ما يكون له معنى عند المتعلم. أو أن التعلم هو البحث عن المعنى. وما دمنا ذكرنا المتعلم فهو مركز التعلم. وما على المعلم إلا إتاحة الفرصة للمتعلم لتزويده بخبرات متكاملة وإبتكارية ومتفردة وهادفة بطرق مختلفة. وذلك ليساعده على تكوين معنى للرياضيات وتكوين بتواصله مع الآخرين معنى للمواقف ولتكوين معنى لتصرفات actions الناس والأفكار.

ويوجد عدة أساليب لتنمية المعنى للرياضيات عند المتعلم ومنها ما قدمه فلويلنجFlewelling (٢٠٠٢) عن طويق الأعمال التعليمية الثرية

rich learing tasks . والأعمال التعليمية الثرية هى التى تعطى التلاميذ الفرصة لكى:

- يستخدم ويتعلم أن يستخدم المعرفة بطريقة هادفة عصرية إبتكارية متكاملة ليدير الاستقصاءات والتساؤلات، والبحث investigation والتجارب لحل المشكلات ومن خلال ذلك : يكتسب المعرفة بفهم (المعرفة كمادة وكعملية للحصول عليها) وينمى اتجاهاته وعادات تكوين المعنى مدى الحياة.

أما جيوجهيجان فهو يركز على العلاقات كأساس لتنمية تفكير الطفل الرياضى وأن كل من المتعلم (التلميذ) والمعلم يسبحان navigate فى المعرفة من خلال البحث والتفتيش search عن المعنى. حيث يفتش التلميذ عن المعنى ويفتش المعلم عن فهمه لمعنى الرياضيات عند التلميذ. وعلى ذلك فالتعلم ظاهرة إبدالية

(إنعكاسية Reflexive) بين المتعلم والمعلم تنشأ على أساس العلاقة التى تأتى عن طريق النواحى الأجتماعية والنشاطية والإجراءات الأبتكارية.

وعلى ذلك فتأسيس المعنى يتطلب من وجهه نظرهم إيجابية من جانب المتعلم وتوفير أنشطة ثرية وفهم للمعنى الذى يكونه التلميذ عن الرياضيات.. من جانب المعلم. وهذا ضرورى ولكننى أرى أن مساعدة التلميذ لتكوين معنى للرياضيات

يكون على أساس تنمية وتكامل الإحساس مع الأفكار مع العمل فى مناخ إجتماعى دافئ يجمع الزملاء التلاميذ والمعلم. فمثلا منذ ٢٠ عاماً قدمت طريقة يستطيع الطفل من خلالها إعطاء الاحساس والمعنى لعدد المليون. وفيها يشترك مجموعة من الأطفال عدد حبات القمح فى مكيال (وعاء) معين مملوء بالقمح ثم اشتراكهم فى صب عدد من المكاييل فى مكان فيجدوا أن مليون جنيه قمح تعمل كومة كبيرة . وبذلك ينمو إحساسهم بكبر عدد المليون مقرونا بمعرفتهم عنه وبعملهم فى التوصل إلى معناه.

وعلى ذلك يمكن مساعدة التلميذ على تكوين معنى للرياضيات عن طريق إتاحة الفرصة له ومناقشته فى توضيح روابطها connections مع الحياة ومع العلوم الأخرى .

(٢) الأستفادة من المداخل المشتقة من رياضيات الشارعstreet math وقد تسمى الرياضيات غير الرسمية أو العرقية. وهى الرياضيات التى يستخدمها الأميون أو غير المتعلمين تعليماً نظامياً لها ، مثل البائعين والشرائيين فى تعاملاتهم الحسابية، والحرفيين فى استخداماتهم للمقاييس والتكبير والتصغير وعمل الماكيتات فى إنتاجهم والزراعيين فى استخداماتهم فى المسحsurvey والرى وبذر البذور فى أحواض تعتمد بطريقة غير مباشرة على التقسيم الرأسى والأفقى (كالمواقع فى الهندسة التحليلية) وعلى التوازى..

(٣) تشجيع استخدام النماذج والأجهزة التركيبية والوسائل المعينة التعليمية فى تقريب وتبسيط وتفسير وإعطاء معنى ملموس للأفكار الرياضية المجردة

(٤) استخدام طرق منبثقة من رياضيات الشارع تقوم على الاستخدام الشفهى أكثر من الأستخدام الكتابى مثل الحساب الشفهى أكثر من الحساب الكتابى، المعالجات الذهنية والتصورية قبل المعالجات الرياضية الصارمة.. فهذا يعطى فرصة للتواصل والتلفظ غير الرسمى الذى يمهد للتجريد.

(٥) استخدام الأنشطة والألغاز والألعاب والرحلات لملاحظة الرياضيات فى الأشياء بالبيئة والمصانع والمزارع وأماكن الصيد والأماكن التجارية.. وعند المناقشة مع الخبراء فيها.. حيث يجد التلميذ أن معظم اللغة التى يستخدمها بالأرقام أو الصور أو الرسوم الرمزية.. بالإضافة إلى أن تعاون التلاميذ فى الإعداد للرحلة وتحديد الإشتراكات والمصروفات كلها تلزم تعاملات رياضية. وكذلك الإجابة على بعض الأسئلة والأستفسارات مثل رسم مسار طريق الرحلة، زمن الرحلة الذى أخذته، السرعة المتوسطة التى يسير بها أوتوبيس الرحلة، أعداد الزائرين للموقع.. تقدم تطبيقات واقعية ملموسة للرياضيات فى الحساب والرسوم الرياضية والإحصائية.

(٦) تشجيع الربط بين الرياضيات المدرسية والرياضيات فيما حول التلميذ فى الصناعة والتكنولوجيا الحديثة على غرار ربط الرياضيات بالطبيعة، حتى يعيش التلميذ الرياضيات فيما حوله. فمثلا عند تقديم الداله من الدرجة الثانية فى مجهول يمكن ربط تمثيلها البيانى لقطع مكافئ بسلك متدلى أو عقد أو أبوة لكوبرى أو بشكل معمارى..

(٧)تشجيع الربط بين الرياضيات المدرسية والرياضيات فى الفيزياء أو العلوم الكيمائية والبيولوجية وعلوم الفضاء وتوجد أمثلة لا حصر لها لهذه الروابطء connections . وكذلك تشجيع الربط بين الرياضيات المدرسية وكافة المواد المعرفية والفنية التى يدرسها التلميذ (المتعلم) فمثلا فى دراسة قصة معينة يطلب من المتعلم رسم موقع فى أحد أحداثها..

(٨) التأكيد على تنمية الحماس والتحدى والمثابرة والتشوق فى دراسة أى موضوع فى الرياضيات المدرسية، وتشجيع البحث والتفتيش فى مصادر المعرفة من كتب ومجلات ومواقع على الأنترنت.. لما له علاقة بما يدرسونه التلاميذ فى الرياضيات.

(٩) وأخيراً التأكيد على تنمية استقلالية التعليم وتنمية النواحى الابتكارية التجديدية فى التلاميذ والمعلمين على السواء.

٦-٣-٥ :الأستفادة من هندسة الفراكتال فى جعل الرياضيات المدرسية أكثر حداثة

قد نتفق جميعاً لتحقيق هذا الهدف أن نقوم بتطعيم الرياضيات المدرسية بهندسة الفراكتال وبزرع وتنمية الفكر المعاصر الذى أنتجها سواء بإدخال أجزاء منها رسمياً فى المقررات أو من خلال عمل الروابط connections بموضوعات ذات علاقة ببعض أفكارها، أو من خلال تقديم بعض أفكارها ومفاهيمها وأشكالها كنشاط غير رسمى أو كنشاط ترويحى مصاحب أو كنشاط ثقافى حر. ويمكن الأستعانة بما جاء فى الفصول المختلفة لهذا الكتاب. بالإضافة إلى ما أثار تطلعاتك فى التعلم الاستقلالى لك لدراسة المزيد عن هندسة الفراكتال والتعمق فيها أو دراسة رياضيات عصرية أخرى مثل الهندسة غير الابدالية، هندسة حدوة الحصان، النظم الديناميكية غير الخطية...

عموماً يمكن الإستعانة أيضا بالمراجع والمواقع للأنترنت للفصول المختلفة لاختيار الروابط فى الرياضيات المعاصرة الأكثر لياقة تطعم بها الرياضيات المدرسية كمادة وفكر.

تعقيب (٦) تضامين وانعكاسات حول تنمية الابتكار التدريس لمعلم الرياضيات

أترك لك كتابة هذا التعقيب بصدق وبعقلية إبتكارية حاولت تنميتها فيك. وذلك من خلال الانطلاق نجوب الماضى والحاضر فى عالم الرياضيات ونجوب الكون فى السماء والبحر لنستكشف هندسة الفراكتال وجذورها ونجوب علوم وتكنولوجيا الحاضر لنتعرف على دلالة هندسة الفراكتال ثم نرسو على واقعنا بين الحين والحين لنعمل دفعه نستعيد فيها حماسنا ومقدراتنا الابتكارية الرياضية لتحسين وضع الرياضيات المدرسية وتدريسها . وقد حاولت أن أتقرب من المعلم القارئ وأعيش مع تفكيره وأضع نفسى فى مكانة كأننى أحاول معرفة وتعلم ما أقرأه فى فصول هذا

الكتاب لأول مـرة. فالمادة الرياضية الـعصرية الجديدة عـليك فى هذا الكتـاب ليست بالـسهلة ولا بـالصعبـة وهى تتطـلب الانغـماس والتركـيز والتحـدى والمثابرة لـكى تتابعها. وقد بذلك مجـهوداً كبيرا لتيسيرها لك استنفدت فيهـا : خبراتى الطويلة فى تبسيط الـرياضيات العالية المتـقدمة (للصغير والكبـير) لتنمية الإبتكـار الرياضى وفى استخدام مدخل التدريـس من القلب النابع من المنهج الإنسانى لأتـفهمك من القلب حتى يكون عرض المحتوى منطقياً وإنسانياً وقريبا منك بقدر الإمكان.

كما إسـتغللت ثمـرة أعمالى فى تنـمية العبقـرية المجددة وفى الاختراع الـرياضى لأقدم المحتوى بأساليب ومداخل متعددة تنمى الابتكار التدريس لك.

والآن إقرأ مرة أخرى هذا الفصل وحاول كتابة انعكـاساتك التى تشعر بها بقلبك وتتفهـمها بعقلك وتـدفعك إلى أعمال ابتكـارية فى التدريس وفى اصـلاح وتحسين وتجديد واقع الرياضيات المدرسية. وفقك الله.

المراجع

١ - أ . د / نظلة حسن أحمـد خضر (٢٠٠١) : أصول تدريس الرياضيات» - القاهـرة - عالم الكتب ط / ١٠ .

٢ - أ . د / نظلة حسن أحمد خضر (٢٠٠٢) قضايا ومشكلات فى التربية العملية»
القاهرة - عالم الكتب ط - ٣ .

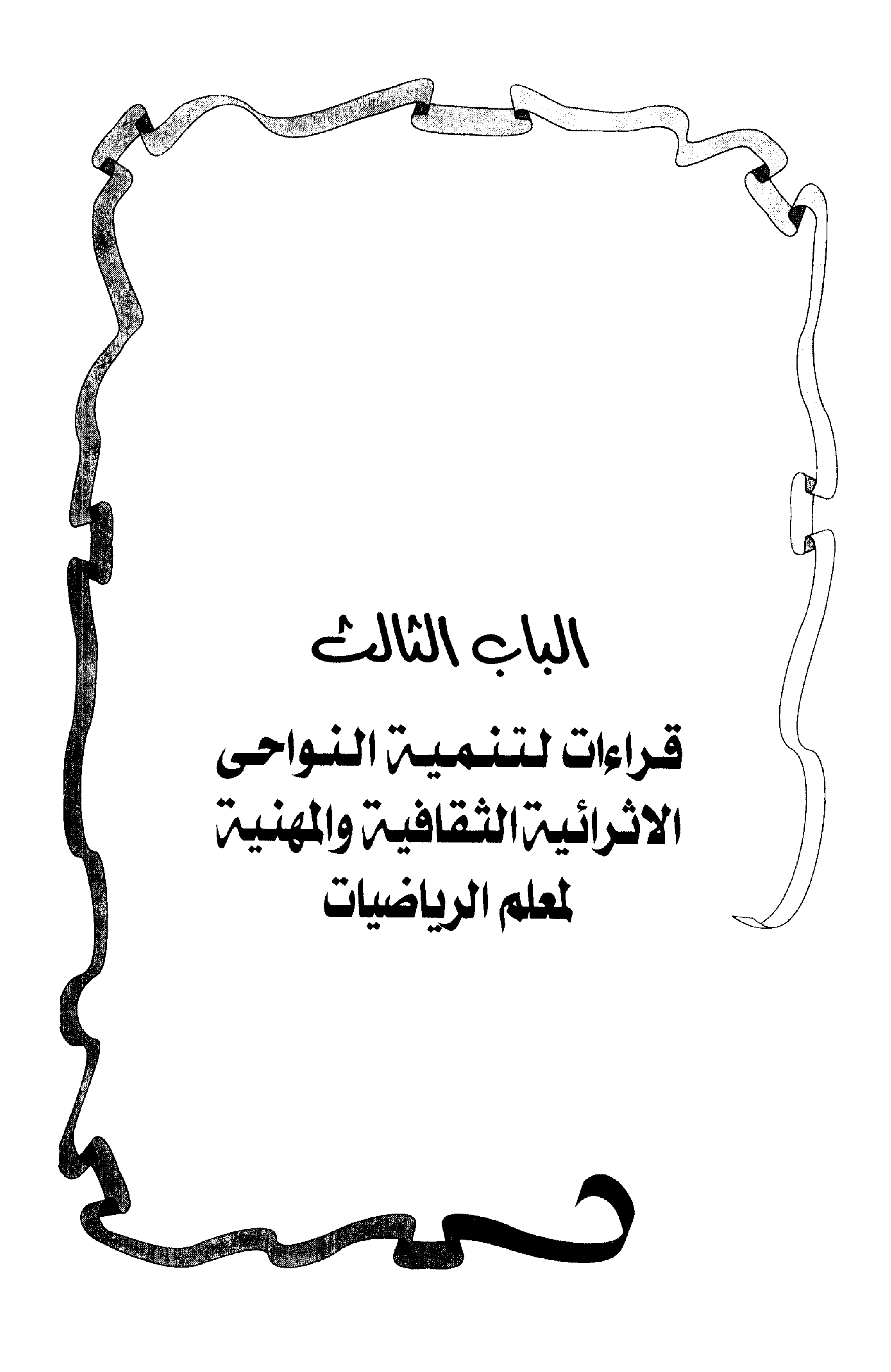
٣ - أ . د / نظلة حسن أحمد خضر وآخرون : طرق تدريس الرياضيات (١)
كتاب حكومى يصدر سنوياً لتأهيل معلمى المرحلة الابتدائية - هيئة الكتب - وزراة التربية والتعليم.

4) Drazin, P . G (1993) : "Non linear Systems"
uk - cambridge univ . press

5) Geoghegan, N (2002) "Learning Matheimtics"
SEARCH FOR Meaning"
Proceedings of the International conference - the
Humanistic Renaissance in Matematics Education - The
Mathematues Education into the 21 st century project P . P 141 - 144

6) Flewelling , G (2002) we need tasks that support
sense making.OP - cit pp. 130 - 134.

7) Maganzini c (1997) Cool Mathematics
US. Price Stern Sloan Inc.



الباب الثالث

قراءات لتنمية النواحى الاثرائية الثقافية والمهنية لمعلم الرياضيات

مقدمة

فى محاولة لمساعدة المعلم على الإطلاع على ما يحدث فى ساحة الرياضيات التربوية (تربويات الرياضيات) وما نشر من أعمال لم يستطع الحصول عليها أقدم فى هذا الباب ثلاثة فصول . كل فصل يحتوى على عمل قمت به، إما قدمته فى مؤتمر أو عمل مرتبط بما جاء فى هذا الكتاب وذلك بهدف إثراء ثقافة المعلم وحفزه على القراءة الحرة، لتتكامل معرفته الثقافية والمهنية بما يرضى تطلعاته وحب استطلاعه المعرفى وبما يعود عليه من تحقيق ذاته لنفع وإصلاح العملية التعليمية. الفصل السابع يقدم ورقة بعنوان «دور رياضيات العرب فى تحضين الرياضيات وفى إثارة اختراعات هندسات معاصرة».

حيث قدمت الورقة فى ندوة لجمعية الرياضيات التربوية حول حوار الحضارات وهى ندوة الحضارة العربية والإسلامية التى عقدت فى كلية التربية جامعة المنوفية فى ١٦ / ٤/ ٢٠٠٢.

يتضح من الورقة أهمية دور العرب فى نمو الرياضيات عبر العصور المختلفة حتى يومنا هذا . وقد يكون هذا رداً على أن صاحب التطور الحديث (المعاصر) الرياضى هم العلماء الغربيون. حيث نوضح أن رياضيات العرب أثارت وما تزال تثير التجديدات الرياضية فالرياضيات مثلها مثل العلم لا موطن لها فهى إنسانية تمتد جذورها ونفعها للعالم أجمع. وكما يقول العالم لويس باستير: «العلم لا يعرف بلد لأن المعرفة تنقى للإنسانية وهى النور torch الذى ينير العالم. العلم هو أعلى تشخيصية Personification للطبيعةnature، وذلك لأن هذا المسمى notion سيبقى الأول الذى يحمل أبعد أعمال الفكر والذكاء»(١).

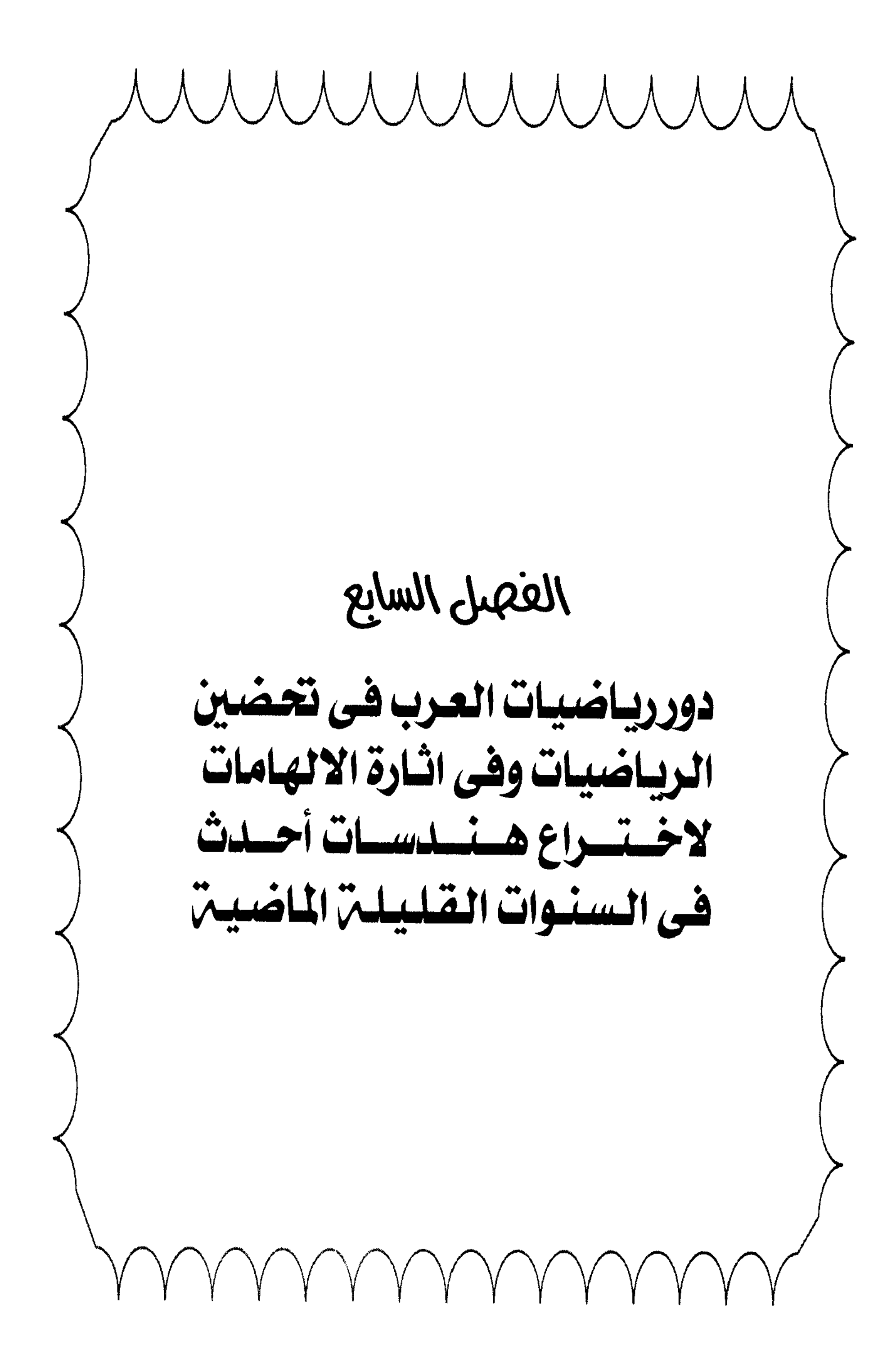
فى الفصل الثامن نقدم ورقة شرفية قدمتها فى المؤتمر الأول لمشروع إقرأ لطفلك ٢٠٠٢ بالهيئة المصرية العامة للكتاب. والورقة بعنوان «الكتابة للطفل ليواكب عصر المعلومات والعولمة». ونوضح فى هذه الورقة أهمية قراءة الأم لطفلها منذ الولادة

1- Hazlitt, w (2001): "Elechromagnetic Techniques" : 2nd ed. CRC Press. Chap.1.

لتغذى وجدانه وعقله وخياله فى جو مـلؤه الحب والدفء والحنان والصبر والتفانى. ونقدم نوعيات من كتب أثارت العبقرية المجـددة قرأها علماء مجدون فى طفولتهم، وتأثروا بها وحفـزتهم على اختراعات فى تكـنولوجيا المعلومات عصـرية. ثم اعطاء فكرة عـن كتب هادفة قمـت بتأليفهـا لإعداد جيل من الـرياضيين المبـتكرين بتنـمية مستويات من العبقرية المجددة والقيم التربوية والروحية والأخلاقية لزرع بذور الخير لعمل الإصلاحات. وذلك لمواكبة عصر المعلـومات والعولمة بتفكير عصرى وقلوب إنسانية. ومؤدى ذلك أن أطفالنا قراء اليوم سوف يـساهموا فى التجديد التكنولوجى والمعلوماتى (الإنسانى) للإستفادة من إيجابيات العولمة والتصدى لسلبياتها .

الفصل التاسع عبارة عن أحد كتيبات سلسلة «سحر وغرائب هندسة جديدة».

يبسط أفكار عامـة لسن ١١ سنة فأكثر. وقد ضمنته فـى هذا الباب لأن له علاقة بما قدمنـاه فهو يمهد للتـربولوجى خاصة التـربولوجى الجبرى وللكـتب الأخرى فى هذه السلسلة التى يـبسط أحدها نظرية تصنيف السطوح . هذا الـكتيب يثرى المعرفة الرياضـية للمـعلم من جهـة ومن جهة أخرى يـمكن الأفادة مـنه مهنيـاً فى التبـسيط والتشويق وجعل معرفة ودراسة الرياضيات أكثر متعة وجاذبية وحيوية.



الفصل السابع

دور رياضيات العرب فى تحضين الرياضيات وفى اثارة الالهامات لاختراع هندسات أحدث فى السنوات القليلة الماضية

دور رياضيات العرب فى تحضين الرياضيات وفى إثارة الالهامات لإختراع هندسات أحدث فى السنوات القليلة الماضية

مقدمة

لعبت الحضارة العربية دوراً كبيراً فى إثراء وإنطلاق الفكر الرياضى فى عصرها والعصور التالية حتى عصرنا هذا.

ففى عصر الحضارة العربية أخترعت مجالات جديدة فى الرياضيات (مثل الجبر للخوارزمى) أو تبلورت واستقلت مجالات (كإستقلال حساب المثلثات عن الفلك على يد الطوسى)، واخترعت وسائل مبسطة للحسابات فى الفلك (كاختراع قانون ابن يونس فى حساب المثلثات الذى يحول الضرب إلى جمع) كما ولدت الرياضيات التطبيقية (باستخدام الهندسة المستوية والمجسمة فى دراسة الضوء على يد ابن الهيثم).

وأسهم إزدهار الفكر فيها فى تنمية التفكير الناقد بجانب التفكير الرياضى الخلاق كنقد الطوسى للكتاب المجسطى (ويعنى الأعظم) لبطليموس الرومانى وبلورة جابر بن حيان الأفلح لهذا النقد فى كتابه (اصطلاح المجسطى). وكان لوسائل تشجيع العلم واختراع الورق والفتوحات - التى كانت تعتبر بمثابة قنوات اتصال للثقافات والمعرفة (ولم تكن تستغل أبداً للإدارة أو السيادة العرقية) مع تنمية القيم الأخلاقية المنبثقة من الدين الحنيف كغيره من الأديان (كالأمانة والصدق) والدعوة إلى التعقل والتدبر والتفكير الراشد والحكمة والحث على طلب العلم ورفع درجة العلماء للعلوم الدينية والدنياوية. فكما يقول سبحانه وتعالى ﴿قُلْ أَتُعَلِّمُونَ اللَّهَ بِدِينِكُمْ وَاللَّهُ يَعْلَمُ مَا فِي السَّمَوَاتِ وَمَا فِي الأَرْضِ﴾. ﴿يَرْفَعِ اللَّهُ الَّذِينَ آمَنُوا مِنكُمْ وَالَّذِينَ أُوتُوا

العلم درجات﴾ وأدى ذلك إلى: (١) حفظ وسلامة التراث الرياضى، (٢) بلورة وتكامل المعرفة الرياضية، (٣) توخى الدقة بالصدق والثبات فى الحسابات مثل حساب محيط الكرة الأرضية، (٤) تشجيع الترجمات من وإلى اللغة العربية (٥) نشر الرياضيات داخل وخارج المنطقة العربية.

ثم بدأ الإنتباه إلى أهمية العلم فى التقدم الحضارى للعرب. فبدأ الأهتمام المتزايد بترجمة العلوم الرياضية والفلكية والعلمية والأدبية والدينية والإنسانية على أيدى كثير من اليهود من العربية إلى العبرية إلى اللاتينية أو من العربية إلى اللاتينية، وفى الأحتفاظ ببعض الأصول العربية (ككتاب حساب الجبر والمقابلة للخوارزمى) أو الأصول الإغريقية ككتاب الأصول لاقليدس).

وكان ذلك بصفة خاصة أثناء أفول الحضارة العربية فى العربية فى القرن ١٢ ، ١٣ م. حفظ التراث الرياضى من خلال هذه الترجمات عن العربية امتد لعدة قرون يمكن إعتبارها تحضين للرياضيات (العربية) التى أينعت ثمارها فى عصر النهضة وما بعدها للفكر الرياضى والفلسفى لها. وذلك من اختراع أفرع جديدة فى الرياضيات (مثل الهندسة التحليلية والتفاضل والتكامل ... فى القرن ١٧ م إلى أختراع هندسات لا اقليدية جديدة (فى القرن ١٨ ، ١٩) على أساس بلورة زخارى للفكر النقدى للطوسى وجابر بن الأفلح.

- جدير بالذكر أن التحضين incubation هى مرحلة هامة للتفكير الابتكارى والإبداعى مأخوذ من لفظ رقاد الفراخ على البيض بدفئها حتى يفقس - تتلوها مرحلة الالهام . من جهة أخرى أسهم الفن الرياضى والمنظور المبدع العربى والمعمار الهندسى العربى والمصرى القديم فى تنميته الهندسة الاسقاطية (فى القرن ١٧ ، ١٨) كما أسهم فى إثارة الألهام لهندسة التحويلات (القرن ١٩ ، ٢٠). وما زال الفن الرياضى العربى (من الزخارف) يثير الرياضيون المعاصرون فى خلق نظريات أحدث (هندسات جديدة فى السنوات السابقة الماضية من التسعينات فى القرن العشرين).

وحول ما تقدم أحاول إطلاق خواطرى من خلال تقديم ما يلى:

(١) روابط connections.

(٢) الفن الرياضى العربى والالهام بهندسات معاصرة.

(٣) إنعكاسات حول اتجاهين لفلاسفة ما بعد الحداثة.

١-٧ روابط connections

اليوم ونحن نحيى ذكرى إسهامات الحضارة العربية فى انطلاقة الفكر الرياضى والقيمى والفنى لتغذية الحوار حول الحضارات، تعالوا نستمتع برحيق عمق الماضى فنتذكر فى مثل هذه الأيام من عام:

(أ) ١٩٣٧ م نشر د / مشرفه محمد مرسى أحمد كتاب «الجبر والمقابلة» للخوارزمى عن مخطط محفوظ باكسفورد، كان قد كتب فى مصر بعد وفاة «أبو عبد الله بن موسى الخوارزمى الذى توفى ٨٣٥ م، بخمسائه عام وحفظته مصر خمسمائه عام أخرى قبل نقله إلى لندن ثم ترجمته إلى الإنجليزيه ١٨٥١م. أى أن الكتاب كتب فى مصر الراعيه للتراث العلمى والرياضى .. وحفظته بأمانه قرون عديدة وأعادته إلى النور فى كتاب منشور لأعظم رياضى عربى للجبر ودراسة تحويل المعادلات وحلها وليعيش اسمه مخلداً ومقترناً بالاجراءات الرياضية أى الخوارزميات.

(ب) ١٩٣٩ م نظمت كلية الهندسة بجامعة القاهرة أولى الكليات الجامعية فى الشرق وفى العالم العربى، محاضرات لإحياء ذكرى وفاة ابن الهيثم ال ٩٠٠ الذى توفى فى مصر ١٠٢٩، عرفت هذه المحاضرات بمحاضرات ابن الهيثم التذكارية.

كما احتفلت الجمعية المصرية للعلوم الطبيعية (وهى من الجمعيات العلمية الرائدة فى المنطقة فى الشرق والعالم العربى) فى نفس العام بذكراه.

ابن الهيثم أو بالأحرى أبو على الحسن بن الحسن (أو الحسين) بن الهيثم جعل

الفيزياء رياضيات تطبيقية. حيث طبق الهندسة المستوية والمجسمة فى أبحاث الضوء (التى تخص المرايا المخروطية والاسطوانية) وهو العلم الذى عكس فكرة الضوء السائدة آنذاكم (حيث كان السائد وقتها أن العين تبعث أشعة على الأشياء فتراها، ولكنه أدرك أن الأشياء التى نراها هى التى تعكس الضوء عليها فتراها العين). وهو نفسه تفكير العباقرة : كوبرنيكس الذى عكس فكرة مركز المجموعة الشمسية من الأرض إلى الشمس ، وجاليلو الذى عكس الفكرة السائدة بأن الأجسام الثقيلة تسقط قبل الأجسام الخفيفة من نفس الأرتفاع لسطح الأرض.

ابن الهيثم الذى أدت أعماله إلى منظور الفن الأوروبى. هاهى مصر مرة أخرى تحتضن وترعى عالم البصريات من الكوفة (ابن الهيثم) فيقيم بمصر طويلاً ٠ ويتوفى فيها) ثم تقوم بإحياء ذكراه وفاءاً وتقديراً لعلمه ودراساته وتخليداً لإسمه.

(جـ) ١٩٦٩ م قام سعيد الدمرداش بتحقيق بعض أعمال البيرونى العالم الرياضى والفلكى (وفى مختلف العلوم) الذى نقح كتاب الأصول لإقليدس وترجمه وترجم أعمال أبولونيوس وأرشميدش وتوصل إلى قوانين فلكية. وقد استرشد بها الطوسى (ولد ١٢٠١ م) أثناء عمله فى ارصاد المغاغة بمصر الذى أدى به إلى نقد كتاب المجسطى لبطليموس (أثناء أسره على يد المغول) والتشكك فى بديهية التوازى قبل الرياضى الايطالى زخارى (١٦٦٧ - ١٧٣٣) الذى نسبت إليه هذه الأفكار بعد أربعة قرون.

وقد بلور ونقح جابر بن الأفلح (فى القرن ١٣ م) أفكار الطوسى الخاصة بنقد كتاب المجسطى وبديهية التوازى ثم كتبها فى كتابه (إصلاح المجسطى لآراء بطليموس) . وقد تأثر بهذا الكتاب بعد ثلاثة قرون كوبرنيكس وكبلر فى رؤيتهما الجديدة لدوران الأرض حول الشمس. وهكذا يتوالى الدور الريادى لمصر فى حفظ التراث ونشره وفى رعاية العلماء وتوفير الوسائل العلمية. مثل استجابة طلب الطوسى بإنشاء مرصد المغاغة والعمل فيه، وفى السماح لابن يونس (الذى ولد فى مصر) فى العمل بمرصد المقطم وتسجيل خلاصة أرصاده فى كتاب « الزيج الحاكمى

الكبير » فى ١٠٠٧م. مصر كان لها دور أيضا فى تحرير الفكر وتشجيع وحماية الأفكار الخلافيه (المعارضة) لما كان موجوداً والصحيحة علمياً حتى عصرنا. وكذلك بالنسبة لأفكار الطوسى والبيرونى وجابر بن الأفلح القائمة على التفكير الناقد ثم التفكير الاستدلالى والتى قلبت النظريات الموجودة واسترشد بها زخارى وكوبرنيكس وجاليليو بعد ذلك بقرون. قبول الفكر المخالف فيه نزعة احترام وتطور كانت سابقة للعصر فى مصر إذا ما قورن بعقاب كوبرنيكس على فكره المخالف وكذلك عقاب جاليليو وإدانته لفكره المخالف ولم تبرئه الكنيسة إلا بعد وفاته بثلاثة قرون (فى ١٩٧٢).

دعونى أرجع مرة ثانية من حيث بدأت. إلى الخوارزمى - الخوارزمى ترعرع فى عصر الخليفة المأمون (ابن هارون الرشيد) عصر الأزدهار العباسى. هارون الرشيد (المفترى عليه) كان يقضى أوقاته فى مجالس العلماء... يحج عام ويقوم بالفتوحات العام التالى ويدعو علمائهم للمشاركة فى مجالس العلماء ومشجعاً الترجمة للتواصل والتفاعل بينهم. فى عهده أخترع الورق نتيجة لتطور علم الكيمياء ليستخدم فى تسجيل الأعمال العلمية والأدبية. أما المأمون (الخلافة من ٨١٣ - ٨٣٣ م) فزاد على أبيه تشجيع التأليف والترجمة فكان يعطى مكافأة الكتاب وزنه ذهبيا لصاحبه وزاد الاهتمام بمجالس العلماء. صحبة الخليفة للعلماء كان سبقاً. واتجاها جديداً استحسنه الغرب وتعلموه بعد عدة قرون. فمثلاً الملك، أوسكار الثانى ملك السويد (١٨٨٥) كان يصطفى العلماء الرياضيين ومنهم فيرستراس فى صحبته ويعهد إليهم عمل مسابقات علمية لمشكلات يستلزم حلها تقديم الجديد فى العلم وقد حدث ذلك فى عيد ميلاده الستين. وكان أن أخترع بوانكريه لحل أحد هذه المشكلات لهذه المسابقة، التربولوجى الجبرى (فى القرن ٢٠).

بصمة أخرى للخليفة المأمون وهو العناية بالنواحى الامبريقيه (العمليه). emperical وتوخى الدقة فى الحسابات وفى الصدق والثبات. فقد كلف مجموعة

من الفلكيين العرب إيجاد قياس أدق لمحيط الكرة الأرضية فى جغرافيا بطليموس. حيث كلف اثنين من العلماء سند بن على وخالد بن عبد الملك بقياس درجة من أعظم دائرة للأرض وكلف آثنين آخرين منهم على بن البحترى. وكل اثنين على حدة فى نفس الوقت فى أماكن متفرقة ثم جاءت النتيجة بإتفاق القياسين. أحد الأماكن كانت صحراء بين دجلة والفرات تمتد بين ٣٤ ، ٣٦ عرض حتى أختلف ارتفاع النهار بين القياسين فى يوم واحد بدرجة ثم قاسو ما بين المكانين فكان $\frac{١}{٤}$ ٩ منها أربعة آلاف بالذراع السوداء التى أتخذها المأمون وحدة للقياس وبحساب الذراع الأسود ٤٩٣,٣ فإن الميل العربى = ١٩٧٢,٢ م.

وطول الدرجة (القوس) ١١١,٨١٥م، ويؤدى ذلك إلى أن محيط الكرة الأرضية ٢٤١٥٤٨ كم.

وهو أقرب إلى المعروف الآن وهو ٢٤٠,٠٧٠ كم وكان هذا أول قياس حقيقى مباشر أخذ جهداً ومشقة ووقتا كبيراً من العلماء الفلكيين كلل بالنجاح لمساندة الحاكم الخليفة المأمون ودعمه المادى والمعنوى للتوصل إلى حقيقة علمية بدقة. وقد سجل هذا العمل ابن يونس فى كتابه «الزيج الكبير الحاكمى». وقد قدر هذا الدور للمأمون فى أوائل القرن العشرين من خلال كتاب كارلو الفونس تلينو - روما ١٩١١ علم الفلك - تاريخه عند العرب فى القرون الوسطى.

٧-٢ - الفن الرياضى العربى والالهام بهندسات معاصرة.

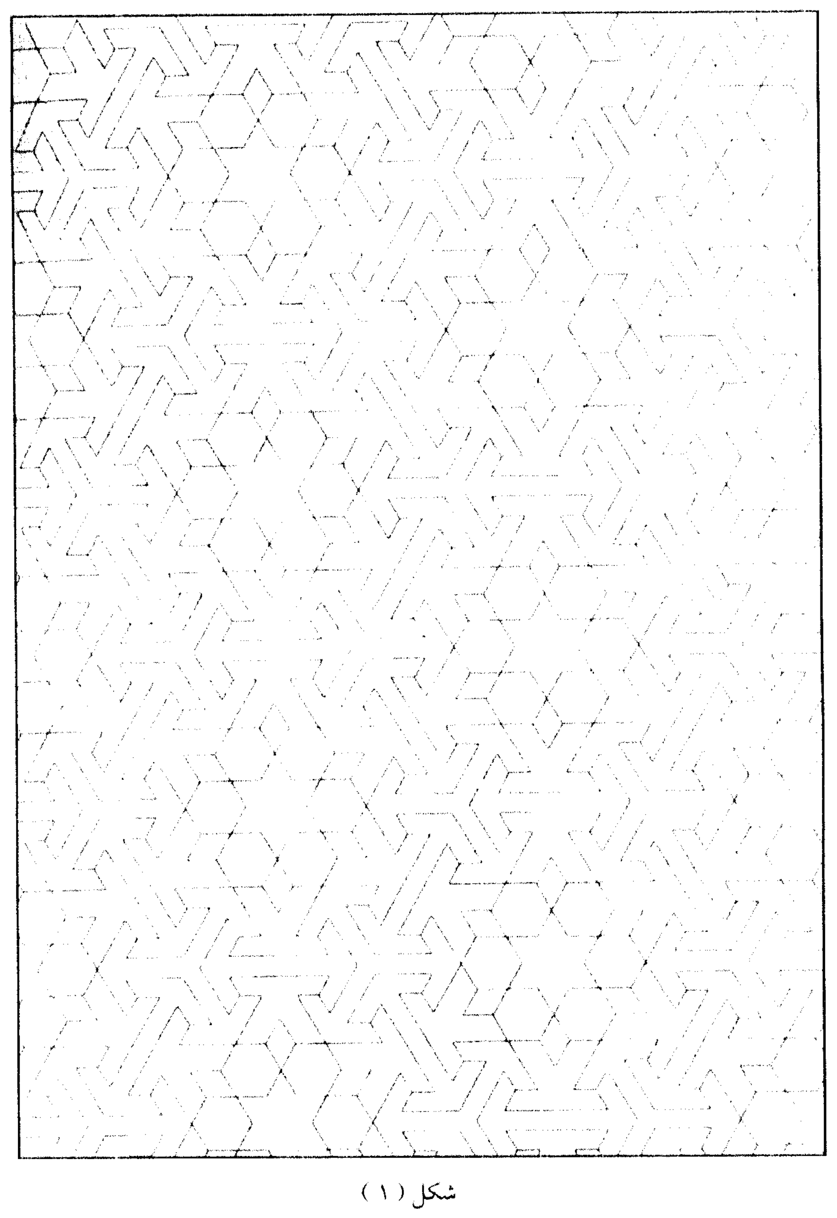
نقدم فيما يلى مثالين يوضحان إنطلاق الفكر الأبتكارى الرياضى فى اختراع أحدث الهندسات المعاصرة بتأثير الفن الرياضى العربى وإيحاءاته المتحددة عبر العصور.

(أ) اختراع الهندسة غير الإبدالية

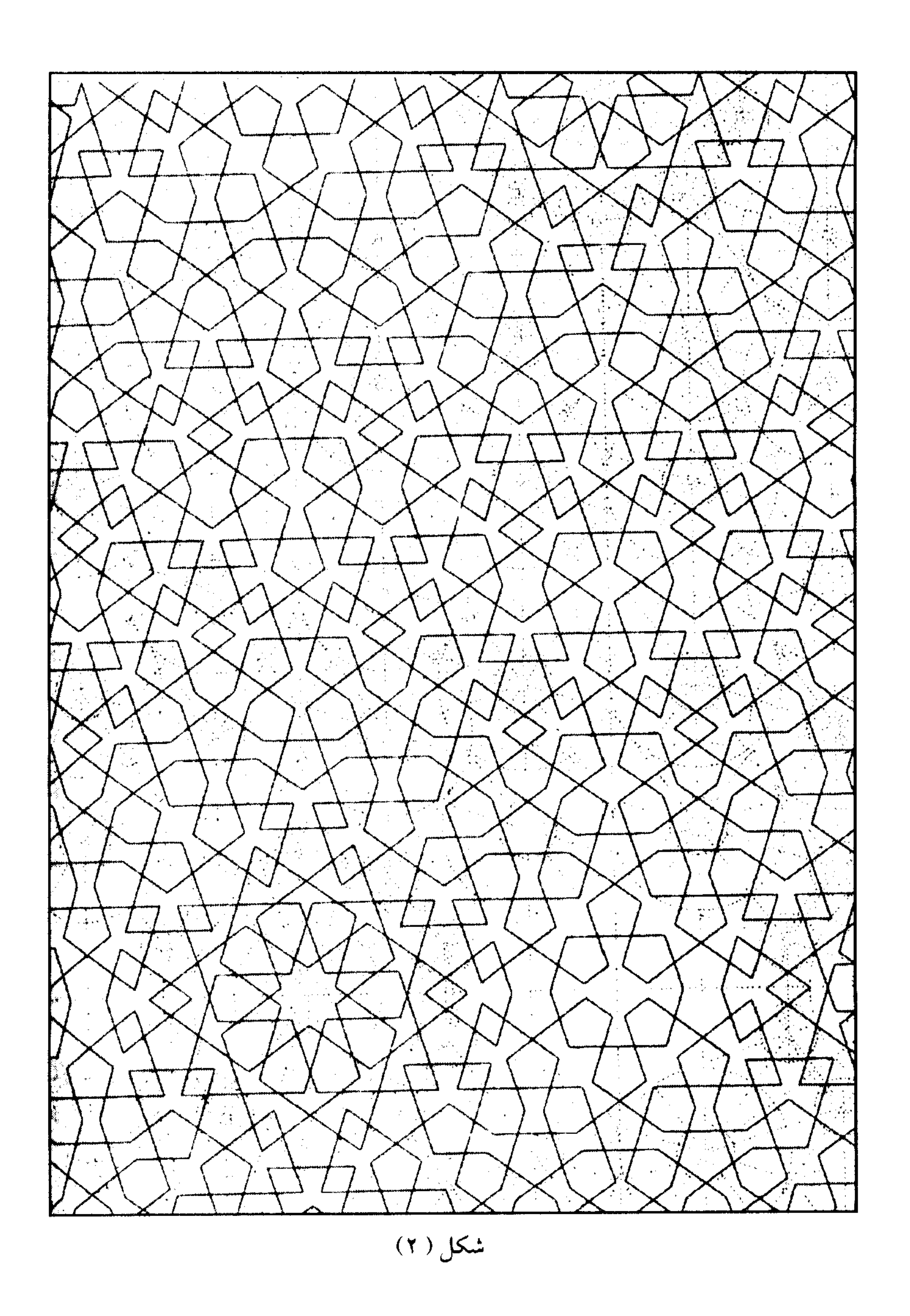
تعالوا نتأمل الزخارف العربية شكل (١) ، شكل (٢) ، شكل (٣). كل منها يملأ الصفحة بأشكال منتظمة غير متداخلة (منفصلة)not overlapping بنسق

دورى (متكرر) معظمه عن طريق تحويلات هندسية اقليدية مثل ازاحة - انعكاس - دوران، يسمى ملأ الصفحة (أو السطح) بهذا الشكل تبليط وأى شكل متكرر بسيط فيها يسمى بلاطةtile . أى بلاطة يكون لها تماثلات بأعداد محدودة تسمىprototile . وقد يكون الشكل المكرر غير بسيط ومتكون من مجموعة بلاطاتpatch of tiles . وقد أبدع العرب وتفننوا فى هذه الزخرفة بأشكال مختلفة.

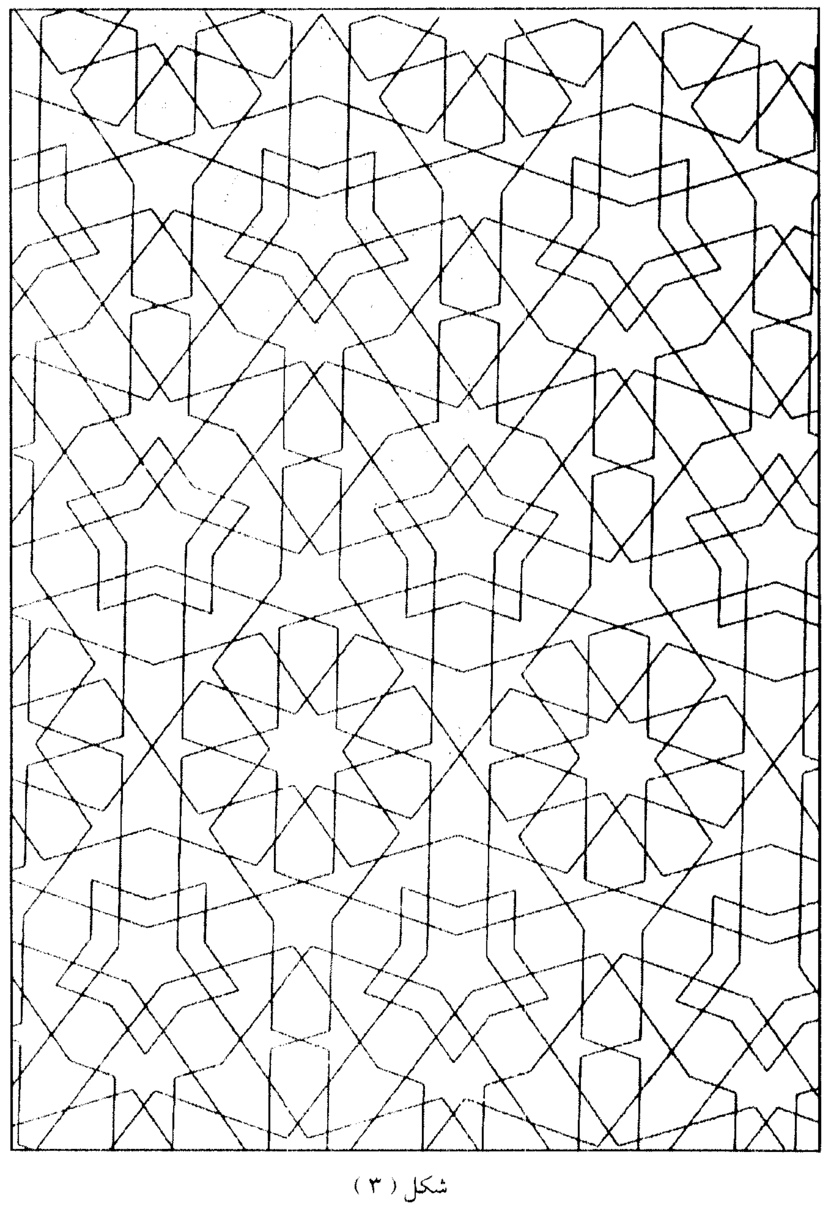
استحسن الغربيون مذاقها وجمالها وعكسوا ذلك فى تجديد مدنهم الحديثة بهذا الفن العربى الأصيل . ومن جهة أخرى استرعى هذا الفن إنتباه الرياضيين وسحرتهم مكوناتها وأنساقها وانتظامات واختلاف الأشكال (مجموعة البلاطات) المنتظمة التى لها نفس التماثلات. فمثلا إذا دققنا النظر فى النجمة الخماسية فى شكل (٢)، (٣) نجد أنها فى شكل (٢) النجمةالعادية أما فى شكل (٣) ففيها خصائص أخرى لانتظام مختلف.



شكل (١)

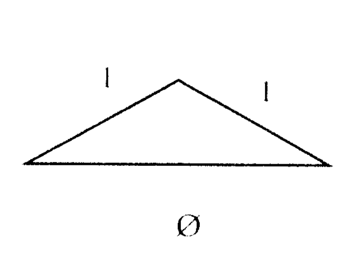


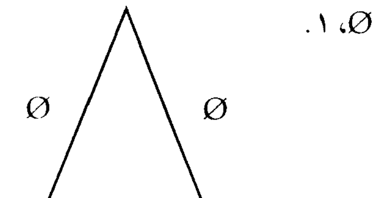
شكل (٢)



شكل (٣)

ونلاحظ أن طول حرف ضلع هذه النجمة له علاقـة بالنسبة الذهبية وقد شد ذلك انتباه الرياضـى المعاصر بنروز Penrose، ثم استطاع أن يكون مثـل هذه النجمة من مثلثات (بلاطات) أبعادها ١ ، ١ Ø وإمتد بتفكيره ليستخدم مثلث آخر أبعاده Ø ، Ø، ١ .





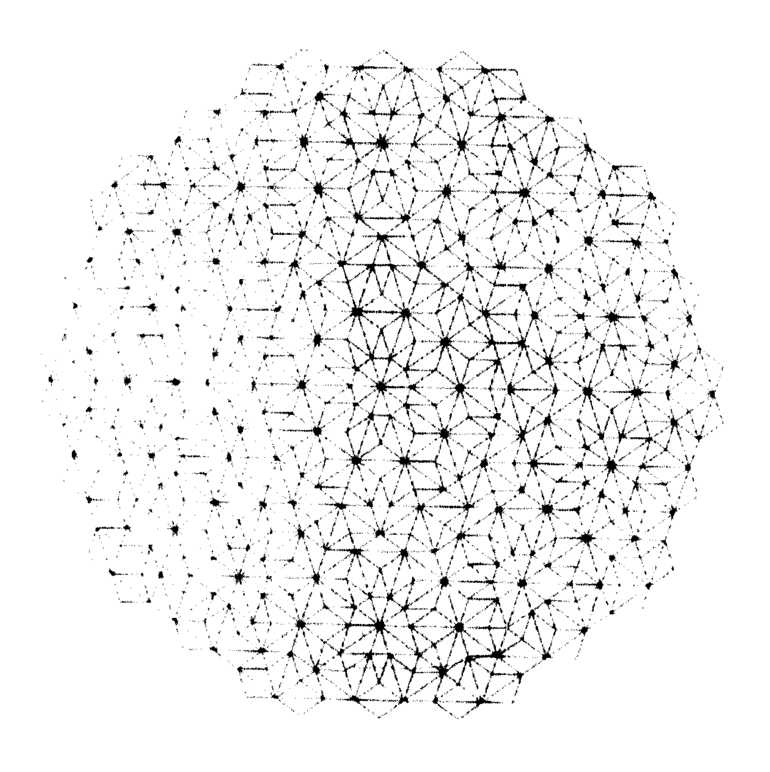
شكل (٤)

وترك العنان لأفكاره وأخذ فى تبليط سطح بهذيـن المثلثين (البلاطتين) مستلهماً بزخارف العرب وتوصل إلى شكل (٥) المعروف بتبليط بنروز Penrose tiling

ـ جذب انتباه لينوناردو أيضا ـ فى عصر النهضة النسبة الذهبية Ø التى وجدها فى زخارف وإنشاءات قدماء المصريين).

وجذب تبليـط بنروز انتباه العالم الريـاضى كونيس Connes وبحـسه الريـاضى الفنـى وتعمقـه فى الرياضيـات المعاصرة (الأحـدث) لاحظ ظهور حـلقات rings تبليط بنروز كانت قد ظهرت مثيلاتها فى تطبيقات التوبولوجى التفاضلى

differential topology, وفى الجبـر التشغـيلى (العـاملى) operator algelora وبعد دراسـة صارمة عشريـن علماً توصل كـونيس إلى أحدث نـظرية فى الهـندسة تسمى بالهندسة غير الابدالية.



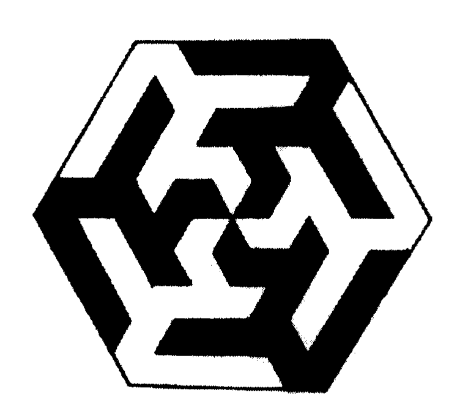
شكل (٥)

ففى البداية تبين له أن البلاطتين (المثلثين بأبعاد (١، ١، Ø) ، (Ø ، Ø ، ١) لا تبلطان فقط المستوى بطريقة واحدة ولكن يمكن بهما تبليط المستوى بطرق لا نهائية. وعن طريق تكافؤ التبليط (ويعنى به وجود تحويل متعامد rigid لا يغير الشكل : دوران إنعكاس إزاحة - للمستوى ينقل مجموعة البلاطات إلى الآخر) استطاع كونيس إنشاء موديول فراغ moduli space من التبليطات للمستوى كفراغ غير إبدالى. وقد وصل إلى ذلك بعد ملاحظته للخاصية شبه الدورية quasi periodici-ty لتبليط نيروز. بمعنى أن الشكل المتكون patch من مجموعة البلاطات المثلثة البسيطة التى أبعادها :(١ ، ١، Ø) (Ø ، Ø ، ١) فى تبليط ما يحدث لانهائيا فى أى تبليط آخر (بنفس المثلثين).

خلاصة القول أثـار الفنى العربى خيالات فى إنـشاء تشكيلاته مبدعة لـرياضيين أدت بدورهـا إلى اكـتشـاف أنماط رياضـة. إثبـات صحة هـذه الأنماط فـتح الـباب لإختراع أحدث الهندسات

(ب) إثارة أفكار هندسة الفراكتال العصرية

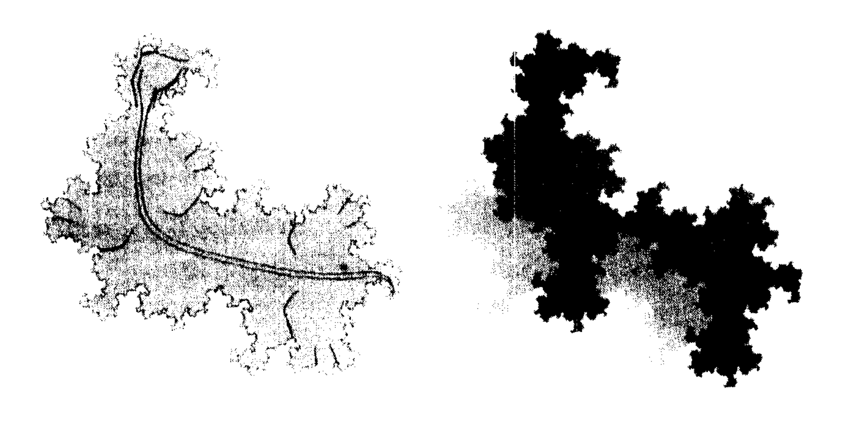
لن أطيل هنا. يكفى أن أشير إلى أن الزخرفة العربية فى شكل (٦) (لاحظ كلمة على بالأبيض والأسود) أثارت بعد عدة قرون الفـنان المهندس إيشر إلى أعمال فنية مثل شكل (٧). والـتى بدورها مع مفاهيم أسـاسية أخرى ودراسة متعمـقة رياضية أثارت أفـكار هندسـة الفراكـتال (التجـزئيات أو الـفتافيـت) التى بـلورها العـالم الرياضى مـاندل برونت. كذلك أثار الفـن العربى وأعمال إشر بعـض نماذج لأعمال إشر بدوال مولده بالـكمبيوتر شكل ٨، ٩، ١٠ كما أثارت نموذج يـخص الهندسة الزائدية عن نموذج بوانكريه للفراغ الزائدى شكل (١١، ١٢)



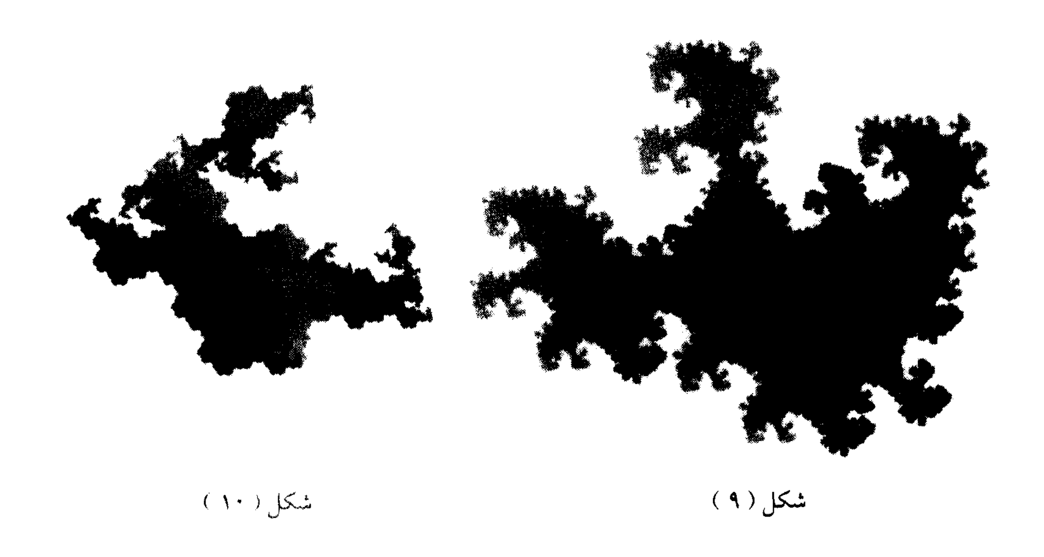
كلمة «علـى» مُكررة ست مرات، ثلاث منهـا بالأبيض وثلاث بـالأسـود، وهـنـا الخـط فـى تـعـادل تـام مـع الـفـراغ
شكل (٦)



شكل (٧)

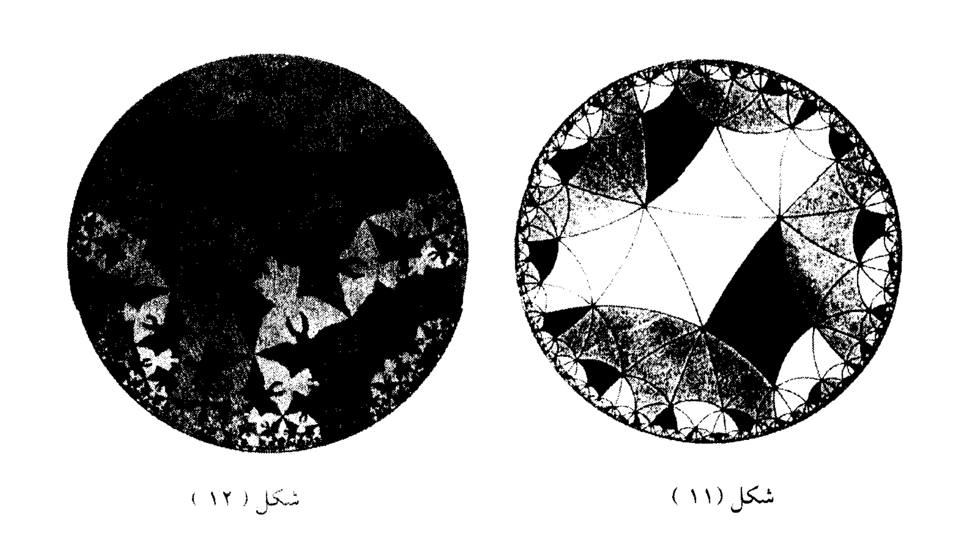


شكل (٨)



شكل (١٠)

شكل (٩)



شكل (١٢)

شكل (١١)

أود قبل إنهاء الحديث حول هذه النقطة أن أكرر أن التمهيد للحضارة الأوربية كان عن طريق ترجمات متعددة لنقل علوم ورياضيات وفنون وآداب الفكر العربي وحضارتها العريقة إلى لغة مشتركة تقريباً. وهى اللاتينية أو العبرية. والآن بعد النمو الهائل للرياضيات المعاصرة (الأحدث) وخلق نظريات theories وهندسات وأفرع جديدة عديدة فى السنوات القليلة الماضية (من ١٠ - ١٥ - ٢٠ سنة الماضية) فنحن فى أشد الحاجة إلى ترجمات لرياضيات بلغات متعددة للانفتاح على هذا النوع الجديد للرياضيات والترقى فى اللغات الأجنبية وإعداد متخصصين رياضيين فيها بأعداد كبيرة جداً فى مصر والبلاد العربية.

٧ - ٣ - : انعكاسات حول اتجاهين لفلاسفة ما بعد الحداثة.

على أساس رفض سقراط غوغائيه (سفسطائية) الفكر الذى كان سائداً قبله فى أثينا القديمة ورفض ديكارت فكر العصور الوسطى نجد أن بعض فلاسفة ما بعد الحداثة مثل نيتشه يتجهون نحو الفوضى (ولنسميهم فلاسفة الفوضى). وذلك برفضهم الصريح لكل من ساهم فى نشأة فكرة الحداثة وتطورها وأيضا رفضهم السرديات (ومن بينها الأديان) التى قامت عليها الحضارة الإنسانية. ورفضهم فلسفات ديكارت وكانت Kant وهيجل ومثاليه أفلاطون ومنطق أرسطو وموضوعية العلم الذى نشأ على هذا المنطق. ومن ثم رفض دور الحضارات القديمة الحضارة العربية بصفة خاصة فى نمو الحضارات الأخرى ومنها الحضارة المعاصرة. فهم يريدون تحرير الفكر الإنسانى من قيوده كى ينطلق صوب آفاق محددة لتأسيس معرفة جديدة أكثر صلابة بادئة من الصفر قاطعين بذلك كل صلة بالماضى وتراثه ومركزين على صلة ما بعد الحداثة بالمعلوماتيه التى تزخر بمفاهيم الكود (الوراثى أو البرمجى) والحوسبة والرقمية والنسخ (البشرى بالروبوت) ونسخ الكود الوراثى والأستنساخ وما شابه ذلك.

على النقيض مما سبق نجد حداثة مدرسة فرانكفورت التى ترى أن الحداثة لا ترتبط بمرحلة تاريخية معينة ولكنها تتحدد دوما كلما تجددت العلاقات بالقديم والوعى بخصائص ما هو قادم. فالحداثة لدى هيبرماس هى الوعى بالمرحلة التاريخية

التى تقيم علاقة مع الماضى والحداثة لانهائية لها. فهى فى تطور مستمر منفتح المجهول.

ألا ترون فيما قدمته تدعيم فلسفة هذه المدرسة عن الحداثة ودحر فلاسفة الفوضى. وأكثر من ذلك فهى محاولة لتعزيز أن رياضيات الحضارة العربية هى الروح النابضة للحياة المثمرة للرياضيات المتجددة تؤتى ثمارها كل حين حتى القرن الواحد والعشرين.

أما فلاسفة حداثة ١١ سبتمبر وفلاسفة حداثة ٢٩ مارس فى القرن ٢١ فالرد عليهم لن يكون بالكلام ولكن بروح قتالية لاستقدام الرياضيات المتجددة سنوياً والمساهمة فى نموها بالعقول المصرية والعربية لترجع الحضارة العربية بدوريه أكثر قوة وتقدما وإشعاعاً بقلب نابض وعقل متفتح وقيم إنسانية.

المراجع

١ - د / أسامة النحاس (١٩٩٠)« الوحدات الزخرفية الإسلامية» القاهرة - مكتبة النهضة المصرية.

٢ - د / سامى بشاى وآخرون (١٩٩٢) تاريخ الزخرفة - القاهرة - وزارة التربية والتعليم - قطاع الكتب

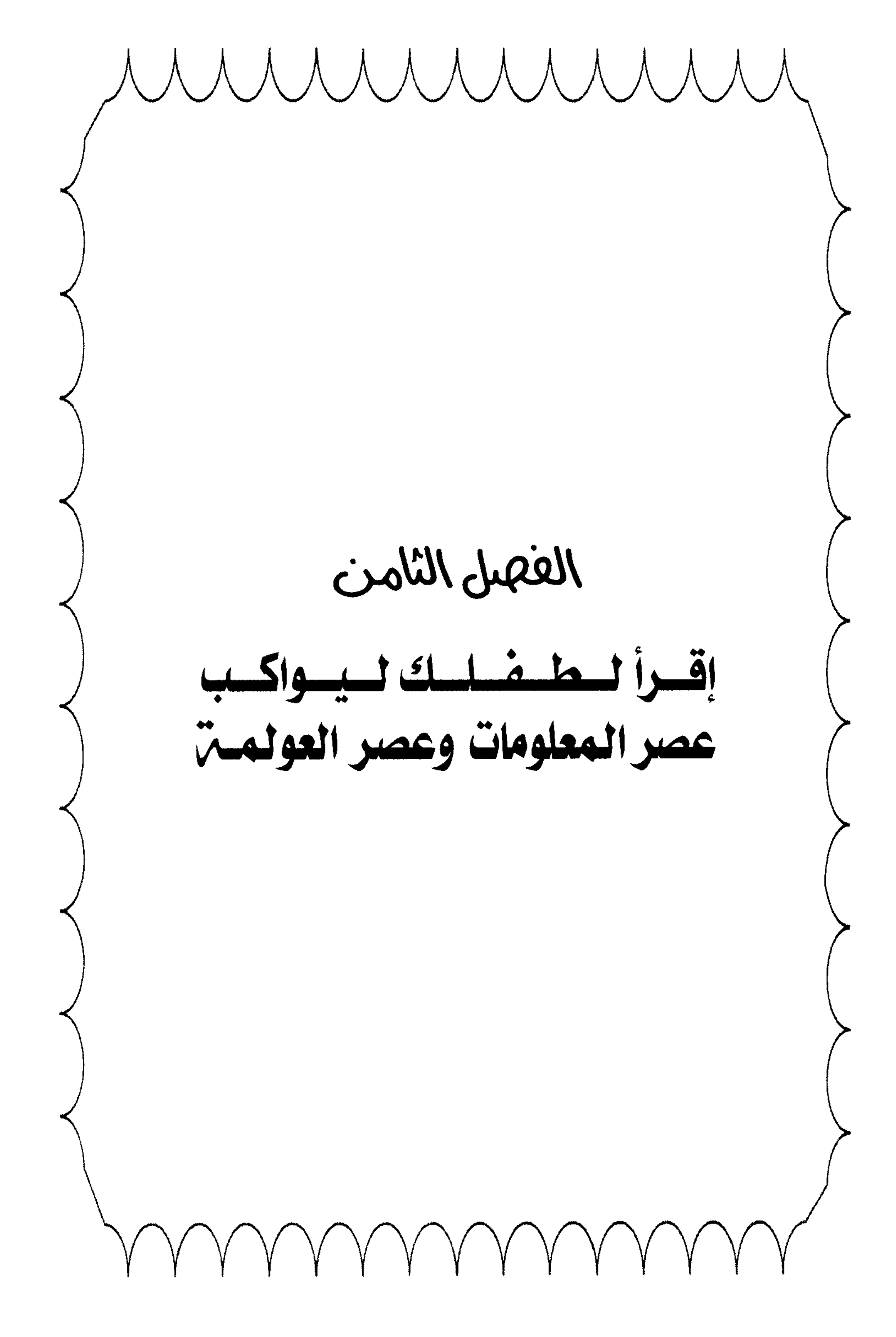
٣ - د / عبد الرحمن بدوى (١٩٦٧) «دور العرب فى تكوين الفكر الأوروبى» القاهرة - الأنجلو المصرية

د نبيل على (٢٠٠٠) «الثقافة العربية وعصر المعلومات» : مجلة عالم المعرفة عدد ٢٧٦ إصدار ثان الكويت.

أ . د./ نظلة خضر (٢٠٠٠) «أصول تدريس الرياضيات» القاهرة عالم الكتب ط / ٧ .

6 - The mathematical intelligencer.

U.S.A, Spinger, (1998) Vol 20 no 1,2 & (2000) Vol 22 no 3.



الفصل الثامن

إقرأ لطفلك ليواكب عصر المعلومات وعصر العولمة

الفصل الثامن

إقرأ لطفلك ليواكب عصر المعلومات وعصر العولمة

المؤتمر الأول لمشروع إقرأ لطفلك مركز - تنمية الكتاب - الهيئة المصرية العامة للكتاب

مقدمة:

لم تعد القـراءة فى عصرنا قاصرة علـى القراءة الصامتة أو الخافـتة أو الجهرية... الفردية أو الجماعية..

فقد أمدتنا ثورة تكنولوجيا المعلومات بوسائل قراءة آلية متعددة مثل:

أ - Bar code reader (المستخدم فى السوبر ماركت والمكتبات).

ب -Mark reader (الذى يقرأ العلامات ويستخدم فى تصحيح الاختبارات).

جـ - Optical Mark reader(OMR) (قارىء الحروف).

د- Magnetic ink character reader(MICR) (الذى يقرأ شيكات البنوك).

هـ - المساح Scanner (الذى يقرأ الصحائف والنصوص ويترجمها).

أو القـراءة من الطبـيعة وانـتاج صور علـى أعلى مـستويـات الوضوح والسـرعة والدقة باستخدام الكـاميرا الرقمية digital. ولم يعد تقليب الصـفحات باليد ولكن بالضغط على زرار فى مفاتيح Key board أو على الفارة.

ولم تعد المادة المقروءة فى كتب أو مجلات أو قصص ... ساكنة ولكنها أصبحت تضج بالحياة تجمع بـين الصوت والصورة والحركة ومحاكاة الواقع بتـأثيره وتشويق بالغ. سهـلة الدخول عليـها (الاتاحة) access بسرعة بـالغة من ديسكـات مسجل عليها مـا يملأ مكتبات، أو بالاتـصال الفورى real time من أى مكان فـى العالـم.. وذلك نتيجـة لتقدم الفيديو ديـسك وتزواج الكمبيوتـر مع التليفزيون وتـقدم وسائل وخدمات الأنترنت والاتصال عن بعد.

وبالرغم من الإيجابيات المتعددة فى هذا الإتجاه إلا أنه أدى إلى تكاسل الطفل بصفة خاصة عن القراءة العادية، مثله مثل الرضيع الذى يستسهل الببرونه على الرضاعة الطبيعية بالرغم من فوائدها التى لا حصر لها. أو مثلها مثل الوجبات الجاهزة ومالها من أضرار.

فا لطفل منذ ولادته محتاج لأن تقرأ له الأم (أو المقربين) كحاجته للطعام وللحب وللأمن والأمان. وهو محتاج أن يقرأ مع الأم (أو المقربين) بعد ذلك تمهيداً لاستقلاليته فى القراءة لإشباع حاجاته النفسية فى التقبل والانتماء والانجاز ثم التحصيل ثم تحقيق ذاته بالتفرد والابتكار والتجديد...

معظم العباقرة المجددين لتكنولوجيا المعلومات تأثروا بكتب قرؤوها فى طفولتهم (أو صباهم) دفعتهم بعد ذلك لإختراع تجديدات فى عالم الكمبيوتر والاتصالات. فالافكار التى يتذوقها الطفل ويشحنها بعواطفه من خلال القراءة تخزن فى ذاكرته وبنيته المعرفية لتنطلق كالشرارة بعد أن يعالجها علمياً وبحثياً... فى الكبر. وذلك شأنها شأن عملية دخول البيانات Logging data الآلية الكترونيا.. التى تخزن فيها البيانات دفعه واحدة ثم تعالج تباعاً بعد ذلك، كما فى أنظمة التحكم الآلى للتوصل إلى مستويات الجودة.

أطفالنا.. بناة المستقبل. يجب أن نوفر لهم سبل القراءة الهادفة الممتعة منذ الولادة حتى يساهموا بإيجابية فى الحصول على المعرفة المشحونة بعاطفة تدفعهم بعد ذلك فى المساهمة فى صنع المعرفة وتطبيقاتها وتجديداتها التكنولوجية.. وفى ممارسة التعلم مدى الحياة. حتى لا يكونوا مجرد توابع هامشيين أو مجرد مهرة فى استخدام تقنيات عصر المعلومات وتكنولوجيا المعلومات الذى أدى إلى كسر الحواجز بين البلاد واختراق آليات العولمة (العلمانية والاقتصادية...) بإيجابياتها وسلبياتها. ويتطلب ذلك اعداد الطفل من خلال القراءة للتعرف على العالم الطبيعى والبيئى والصناعى والتكنولوجى... كوحدة. وكذلك ليشترك فى صنع التقدم وليتفرد فى رفع طموحاته وأعماله لأعلى المستويات ليتمكن من التصدى لسلبيات العولمة.

وعلى ذلك فإننا نقدم فى هذه الورقة:

١ - أهمية قراءة الأم (أو المقربين) للطفل منذ الولادة للإجابة على السؤال لماذا تقرأ الأم لطفلها؟

٢ - كتب تأثر بقراءتها بعض العباقرة المجددين لتكنولوجيا الكمبيوتر والاتصالات فى طفولتهم.

٣ - مجهوداتى (بإختصار) فى كتب الفتها ليواكب الطفل عصر المعلومات والعولمة.

٨ - ١ - أولاً: أهمية قراءة الأم للطفل (منذ الولادة):

الجنين فى بطن أمه أول حاسة تنمو لديه هى السمع وأول ما يسمع نبض دقات قلب أمه. النبض عبارة عن إيقاع (ريتم Rythm) والريتم يعتبر فن موسيقى ويعيتبر حساب تطبيقى وهو مبدأ لكل الحياة والأنشطة. ولكونه مرتبط بقلب الأم والدفء العاطفى فهو يؤلف الإحساس بالحب فيتغلغل فى الممارسة والتعبير عن المشاعر والفنون والعلوم.... بعد ذلك.

إذاً سماع الجنين لنبضات قلب الأم هو أول نافذة للتعلم واللغة التى يقرؤها بأذنيه للتعرف على العالم ـ طه حسين كان يقرأ بأذنيه وبيتهوفن عندما فقد سمعه كان يقرأ الصورة السمعية لسيمفونياته.

بعد الولادة تتعدد لغات الاتصال الطفل مع الأم والعالم الخارجى ولكن يبقى للريتم الناتج من تربيت يد الأم الحانية عليه قبل النوم أو مناجاته أو غنائها له مبعثا للراحة والأمن والأمان والتعلم.

تتعدد أيضا منافذ الإحساس للطفل لتغذى مشاعره وحبه واستمتاعه بتمثيل العالم الخارجى فى ذهنه من خلال الأم . عندما تقرأ الأم لطفلها فى المهدمن قصة أو كتاب، تكون القراءة مرتبطة بصوتها المقترن بتحريك أوتار قلبه وروحه فينجذب إلى المحتوى ويشارك فى لمس وتقليب الصفحات والحملقة فيها. بقصد أو بدون قصد يربط ويخزن فى ذاكرته ما يراه ويسمعه ويحسه فيها بمثيلاتها فى العالم المادى

المحسوس. وفى مرحلة نمو معينة يربط مثلا شئ كروى فى كتاب تقرأه أمه أويقرأه هو ببرتقاله إنجذب إليها بإنتظامها الهندسى فى الطبيعة.. وبلونها .. وبرائحتها.. بطعمها.. بالمشاركة فى شرائها بتقشيرها. بعمل عصير أو كيكه.. ثم ينجذب بعد ذلك بالكرة بشكلها الهندسى وبكل الحواس التى ترتبط بشكلها مثل البرتقالة، بالإضافة إلى اللعب والمباراة والفوز والتعاون.. ومعلومات عن قواعد اللعب والأبطال.. فتصبح القراءة مرتبطة بخبرة ممتعة أو تثير خبرة ممتعة تنمى إحساس الطفل بالفن وتذوق الجمال الهندسى وتنمى حب استطلاعه لتعلم واكتشاف ما يرتبط فيها من علم وفن فيما بعد.

فمنبع التعلم بحب إذا هو قراءة الأم لوليدها فى البداية وهوأيضاً يقوى منافذ الإحساس بجمال المادة المقروءة بصوتها المتفرد الذى يمثل بحيوية إيقاعية الحيرة والاعجاب والإنبهار والتعجب! ليتذوق الطفل ويستطعم حلاوة ما يقرؤه.

فالطفل (أو الكبير) عندما يعجبه شئ لا يقول دا جميل جداً ولكن يقول دا حلو قوى والحلاوة Sweatness لها مذاق باللسان.. وعدما نستطعم شئ فإننا نغمض أعيننا ولذا فإن منافذ الاحساس متعددة. وتعددها مهم كمجسات Sensors لازمة فى التعلم. شأنها شأن مجسات أى نظام تحكم آلى (فى أنظمة التحكم الآلى للمرور ـ أو فى غرفة الانعاش. أو الكاميرا الرقمية).

وأكرر أن منافذ الاحساس ليست قاصرة على الحواس الخمس فمثلاً هيليين كيلر كانت تستمتع بإيقاعات الأمواج وتستمتع بحضور الحفلات الموسيقية والأوبرا وهى صماء.. كان منفذ الاحساس الرئيسى لتعلمها هو اليد. وكانت قراءة الأم لها وهى سليمة حتى بلغت ١٨ شهر أحد أسباب نبوغها.

قراءة الأم لطفلها قبل النوم ليخلد إلى الراحة له مزايا أخرى هامة. كلنا مبتكرفى أحلامه (كما يقول فرويد). فمثلا لو حاولت أن تسترجع صورة أحب الناس إليك الأم .. الأب .. الأبن فالصورة تكون باهتة غير واضحة المعالم ولكن عندما تحلم به يكون واضحاً واقعياً فى شكله وصوته ولبسه فى أحداث يؤلفها عقلك الباطن بتفرد، مصالحة الفرد لعقله الباطن مهم جداً للمجدد المخترع. الأم بقراءتها للطفل

قبل النوم تساعده بهدوء وإيقاع محبب إلى النوم والراحة لأحلام مريحة.. وهى بدورها لها أهميتها فى تنمية الابتكار فيما بعد...

حب الأم لوليدها هو الدافع وراء صبرها وتفانيها وسهر الليالى فى خدمته. الحب والتفانى يمتصه الطفل لا شعوريا من خلال دأبه الأم على القراءة لطفلها رغم عنائها وتعبها. هذا يمكن أن يولد فى الطفل عند الكبر صفات الفنان أو العالم المخترع (المجدد) الذى يقضى الساعات الطويلة فى إنتاج عمل يحبه بالإضافة إلى أن الأم المتنورة تعرف أن القراءة تأخذ مكانها مع الاستمتاع كمصدر أساسى للمعلومات والسرور. بجانب أنها تنمى نواحى التفكير مثل عملية المسح -search ing وخلق المعنى والرموز.. الاستعارة، التشبيه، تكوين العلاقات، التحليل للأفكار والمواقف، التكوين فى قوالب جديدة...، تكوين الاتجاهات والقيم ...(مثل معالجة البيانات processing لانتاج النواتج المرغوبة فى نظم المعلومات). فتعمل من خلال القراءة لطفلها أن يمارس وينمى هذه النواحى للتفكير.

أهمية قراءة الأم لطفلها ثم لمجموعة أطفالها تسهم فى تحبيب الأطفال للعمل كفريق فيما بعد..

الأم بحكمتها (كما فى مرحلة الفطام) تقلل دورها وارشادها تدريجيا فى القراءة ليعتمد ويستقل بنفسه فى القراءة، مع تشجعيه على القراءة المستمرة حتى تنمى حوافزه من الداخل ليقرأ ويشبع حاجاته الداخلية لحب المعرفة والاستمتاع بها، وتبادل الكتب وتهادى الكتب مع رفاقه.

٨ - ٢ - ثانياً : كتب تأثر بقراءتها بعض العباقرة المجددين لتنكولوجيا المعلومات فى الصغر.

يزخر تاريخ العلم بعلماء تأثروا بقراءات فى طفولتهم من الكتب أو من الطبيعة. فمثلاً أديسون مخترع المصباح الكهربائى كا يعانى من اعاقة سمعيه. تفننت والدته فى تحبيبه فى القراءة والتعلم بالمنزل (بالرغم من قسوة أبيه) . حتى أنه فضل أن ينتسب إسمه إلى عائلة الأم بدلاً من الأب ... إستمر فى القراءة الدؤوبه من خلال

عمله كبائع صحف وكتب... بمحطات القطار، حتى أثمرت مع نبوغه فى اختراعات عديدة، وانشاء أول معمل للتجارب الصناعية العلمية.

ماركونى مخترع الراديو كان له إعاقة نفسية متمثلة فى خجله الشديد الذى منعه من الانتظام المدرسى. تعلم من القراءة بمكتبة والديه الكبيرة بالاستعانة بالأهل والاساتذة المقربين. وزادت ميوله للقراءة الحرة فى رحلاته، حتىأن بلورة اختراعه نتجت من قراءة لموجات هرتز فى احدى رحلاته البحرية.

أما العالم أينشتين مخترع النظرية النسبية فكانت قراءاته من تأملات الطبيعة وما يسترعى انتباهه فى البيئة. فمثلا وهو فى الرابعة من عمره كان يحملق فى لعبة تتحرك عن طريق مغناطيس ليعرف سبب حركتها بدون أن يشدها بحبل مثلا... فدفعه ذلك لأن ينشئ معمل فى عقله ليفسر ظواهر غير مرئية بنظريات غاية فى الدقة والتعقيد.. وإذا كانت لعبة مغناطيسية أثارت الفضول العلمى لأينشتين فما بالك بالألعاب الآلية أو النصف آلية ما يمكن أن تثيره لطفل اليوم فى غده.

ولذا أقدم كتب قرأها فى طفولتهم (المبكرة أو المتأخرة) علماء مجددين كانت سببا فى إثارة اختراعاتهم فى عالم الكمبيوتر الإتصالات وهو ألين تيورنج مخترع الآلة المفكرة (أو الكمبيوتر) ، رابنيو مخترع أجهزة القراءة الآليةreaders بلن مخترع الرسوم المتحركة بالكمبيوتر.

ألين تيورنج Allen Turing (١٩١٢ - ١٩٥٤) أحد المساهمين الرئيسيين فى اختراع أساسيات علوم الكمبيوتر ونظم المعلومات وخاصة فى تطوير الآلات المفكرة. وذلك بعد أن نجح فى فك شفرة اتصالات الألمان فى الحرب العالمية. تأثر فى طفولته بكتب عن الأعداد حتى أحبها فإعتبر الأعداد بقواعدها من أصدقائه . أما الكتاب الأكثر إثارة الذى قرأه فى طفولته فكان كتابا يركز على أن جسم الإنسان آلة The body is a machine . ويبدو أن العضو كآلة التى خرج بها من الكتاب أشعلت تحدى فى نفسه بعد ذلك «اعتبار العقل آله » أو ما فضل أن يسميه بالعقل الاكترونى أو الآلة المفكرة (الكمبيوتر) وكان يحلم قبل وفاته بيوم ١٩٥٣ بكمبيوتر ذكى.. وقد تحقق حلمه على يد آخرون بعد ثلاثين عاماً.

بتطوير الذكاء الاصطناعى وخبير النظام Expert System الذى يفكر ويصدر القرار والأرشاد (وحتى العلاج فى المستشفيات).

يعقوب رابينو Jacob Rabino (١٩١٢ ـ) له مئات من براءات الاختراع منها أجهزة (آلات) القراءة الآلية، وأول ملف ديسك مغناطيسى. جاءت الهاماته من كتاب قرأة وهو طفل جعله مفتون بالتكنولوجيا الموصوفة فيه: وقد كان أكبر حافز له فى التجديد هو استياؤه وألمه من أى مستوى جودة يصل إليه حيث كان يتطلع دائما إلى تحسين جودة أى (إختراع - تجديد) يقوم به فيقول :

"That I am bothered by things that do not work well, or things that work but I think could make work better.. and the way to stop pain is to invent a better way"

جيمس بلن James Blinn (١٩٤٩ -) هو أيضاً مجدد عبقرى أضاف الحياة والجمال والمتعة والسعادة لأناس كثيرين من خلال اختراعه لمحاكات الفيديو والكمبيوتر. أى للرسوم المتحركة الكمبيوترية animation . عندما كان صبى أثار الهامه مقاله قرأها فى الإلكترونيات المبسطة. وعندما كان فى المرحلة الجامعية قرأ كتاب بعنوان «النسبية فى صور » يشتمل على صور كارتونية متعاقبة جعلت لموضوع النسبية معنى لم يستطع التوصل إليه بأى حال فى دراسته الجامعية لهذه النظرية الصعبة. هذا الكتاب أطلق جوانحه وحوافزه لاسعاد الغير بعد ١٥ سنة. وذلك بجعل الصور الكارتونية فى هذا الكتاب صور كارتونية متحركة بالكمبيوتر لمساعدة الغير فى جعل النظرية النسبية ذات معنى لها، وقد كان هذا سبباً فى اختراعه الرسوم المتحركة الكمبيوتريه. ويبدو أن رغبته الملحة لشرح الرياضيات والعلوم كانت الدافع وراء هذا التجديد، وكذلك رغبته الجارفة فى اسعاد الأطفال عندما يشعرون أن الرياضيات والعلوم هى مرح وتسلية Fun.

خلاصة القول أن العباقرة المجددين Innovative genious لعصرنا لديهم رغبة وحوافز قوية لعمل اصلاحات كوكبية global reform . وهم لديهم إحساس بالبيئة الواسعة (التى تتضمن الإقتصاد - الحاجة - القبول فى السياق الحضارى).

حيث يختاورا المشكلات الكبيرة ذات التطبيقات الواسعة التى تفيد أو تصلح أو تسعد القطاعات المنتشرة فى أنحاء العالم.

هذه الحساسية تنطلق من الأمن والأمـان والراحة والحب الذى يشبعه الأهل فى الطفولة ومن كتب قرؤوها مشحونه بعاطفة فى الصغر أثارت الهاماتهم بالتجديدات التى إخترعوها فى الكبر فى عالم نظم المعلومات والاتصالات.

٨ - ٣ - ثالثاً: مجهوداتى فى كتب ألفتها للطفل ليواكب عصر المعلومات والعولمه

يتضح مما سبق أن العباقرة المجددين (ذوى الابتكار التكنولوجى) أسهموا بإختراعاتهم فى التطور الآلى التكنولوجى لنظم المعلومات والاتصالات، والتى أدت بدورها إلى التقريب بين البشر وبيئاتهم فى إطار العولمه. وعلى ذلك فإعداد الطفل ليأخذ دور إيجابى فى عصر المعلومات والعولمه يتأتى عن طريق تنمية العبقرية المجددة لديه.

هذه العبقرية المجددة موجودة فينا جميعاً بمستويات مختلفة ويمكن تنميتها إلى أقصى الحدود. وتسهم القراءة المحببة المتميزة فى الصغر بإشعال وإثارة العبقرية المجددة.

العباقرة المجددين (الانسانيين) كانت لهم نوازع وعواطف وقيم طيبة للارتقاء باختراعاتهم ليستفيد وينعم بها قطاعات متباينة واسعة من البشر فى بيئات مختلفة. وعلى ذلك تنمية النواحى الانسانية والقيمية أساسيه مع تنمية العبقرية المجددة بقراءآت هادفة منذ الصغر تسعد الطفل بتبسيط المعرفة وجعلها مسلية.. خاصة لفهم الرياضيات والعلوم والتكنولوجيا، فتكون لها الأثر البالغ لإعدادهم لهذا العصر.

من الحضارات السابقة أود أن استخلص قيمتين وجدت لهم انعكاسات فى العبقرية المجدة للعلماء الانسانيين.

أولها الحب الذى يجمع البشر. فقد كان يحلم الاسكندر المقدونى فى امبراطوريته أن يختلط كل الرجال معاً كمعسكر حب Alexander wished to mix all men together as a loving camp

وثانيهما عمل الصالحات والإصلاح واحسان العمل (بالاضافة إلى الحب) وهى تمثل أعلى مراتب الاصلاح الكونى global reform والتى انعكس بعض مستوياتها فى أعمال العباقرة المجددين (ذوى الابتكار التكنولوجى) الذين ذكرتهم.

« أنظر الآيات: (٥٥ فى سورة النور)، (٢٦ يونس)، (١٥ طه) ، (١٧٠ الأعراف)، (١٧ الرعد)، ...

لاحظنا أن معظم المجددين العباقرة لعصرنا كانوا لا يرضوا عن أى مستوى لأعمالهم. وكان ذلك يدفعهم إلى اختراع الوسائل (والاجهزة) التجديدية التى تحقق أعلى مستويات الجودة. هذا يعكس سمة أساسية لأى نظام معلومات وهى التغذية الراجعة والتحكم للوصول بالنواتج إلى مدى عالى من المستويات (المعايير) للجودة.

وعلى ذلك فقراءة الطفل لابد أن تسعى أن يتطلع الطفل من خلالها إلى الأفضل والأحسن فى تفعيل وتشغيل ما يقرأه وفى رفع مستويات أداءاته.

نلاحظ أيضاً أن العبقرى المجدد لعصرنا (ذو العقلية التكنولوجية) ليس هو فقط المبتكر (فى العلوم والفنون) وليس فقط المخترع (كالمهندس المخترع الذى يتطلع إلى تطبيق جديد لفكرة طيبة فى مساحة محدودة). ولكن يختار المشكلات الكبيرة التى لها تطبيقات واسعة لها علاقة بتقدم واقعى وتحسين حياة الانسان، ومشبعة بحبه للرياضيات والعلوم (والتكنولوجيا). أى أن العبقرية المجددة تشمل الاختراع الذى يشمل الابتكار.

من هذا المنطلق فقد استندت فى تنمية العبقرية المجددة للصغير والكبير فى كتبى حول الرياضيات (وهى ثلاثة كتب لمرحلة رياض الأطفال حكومية، ١٤ كتاب لسن ١٠ سنوات فأكثر منشورة بالهيئة المصرية العامة للكتاب، أربعة كتب جامعية) على ما يأتى من خلال القراءة الهادفة:

١ - تنمية خصائص العبقرى المجدد الانسانى (التى ذكرتها فى مرجع سابق٢).

٢ - تنمية قيم وعواطف الحب وعمل الصالحات لنفع البشرية وإسعادها.

٣ - زيادة الاستمتاع والتشويق والتبسيط للمعرفة الرياضية كفن راقى وكمرح وتسلية.

٤ - استخدام اساليب اللعب، القصة، اللغز، توظيف شخصيات الرسوم المتحركة فى قوالب جديدة، البحث (المسح) عن المعرفة فى الكتب والمصادر.. التأمل والقراءة من الطبيعة، الربط بين أصغر الكائنات وأكبر الأجرام السماوية.. الرحلات مع الخيال العلمى لأقصى الأماكن فى السموات وفى بيئات مختلفة على كوكبنا الأرض.. توظيف الأحلام مع اللاشعور مع الخيال مع الواقع فى حل المشاكل المعقدة الغريبة والقضايا الانسانية بأعلى مستويات الجودة.

كنت أود أن يتسع الوقت لعرض أمثلة توضح هذه الأساليب التى استخدمتها لبيان كيف تنمى العبقرية المجددة فى كتبى الثلاث والعشرون أو حتى آخر كتاب صدر لى هذا العام ٢٠٠٢.

إلا أننى أفضل أن أذكر أن العبقرية الهندسية الموجودة فينا منذ قدماء المصريين تترعرع فى صغارنا وأستخلص ذلك من أن أحد مؤلفاتى «سحر وغرائب هندسة جديدة» الخاصة بتبسيط وتشويق وتحبيب واللعب بأفكار أحد الهندسات الحديثة وهى التوبولوجى الهندسى، صدر منها الكتاب الثالث ونفذ ووزع بأكمله (قبل صدور الكتاب الأول والثانى الذى يعتمد عليه).

ومؤدى ذلك أن أطفالنا قراء اليوم لكتب هادفة سوف تكون لهم اسهامات فعالة فى التجديد التكنولوجى والمعلوماتى (الإنسانى) والاستفادة من إيجابيات العولمة والتصدى لسلبياتها.

وأخيراً الشكر لكل مجهودات إقرأ لطفلك، كتب ومعرض كتب الأطفال، والقراءة للجميع ومكتبات الطفل واحياء المكتبات الأثرية.

وفق الله الجميع لرفعة مصر على يد أبنائها القارئين المجددين.

المراجع

1 - Fraiberg, S.H "The magic years"methuen & Co Ltd, London 1959.

2 - Khedre, Nazla. H.A. "On nurturng the innovative mind through computer and mathematices edvcation" Journal of mathematics education Faculty of education Benha. Zagazig university. Vol 3 July 2000.

٣ - أ . د. نظلة حسن أحمد خضر: ثلاثة كتب فى «تنمية المهارات المنطقية لرياض الأطفال هيئة الكتب بوزارة التربية والتعليم ١٩٨٦ حتى الآن.

٤ - ٥ كتب لسن ١٠ سنوات فأكثر فى سلسلة «حكايات والغاز رياضية تنمى التفكير الهندسى والابتكارى ط.، ١٩٩٩ بالهيئة المصرية العامة للكتاب.

٥ - ثلاث كتب لسن ١١ سنة فأكثر فى سلسلة « سحر وغرائب هندسة جديدة». ١٩٩٢ نفذت من السوق بالهيئة.

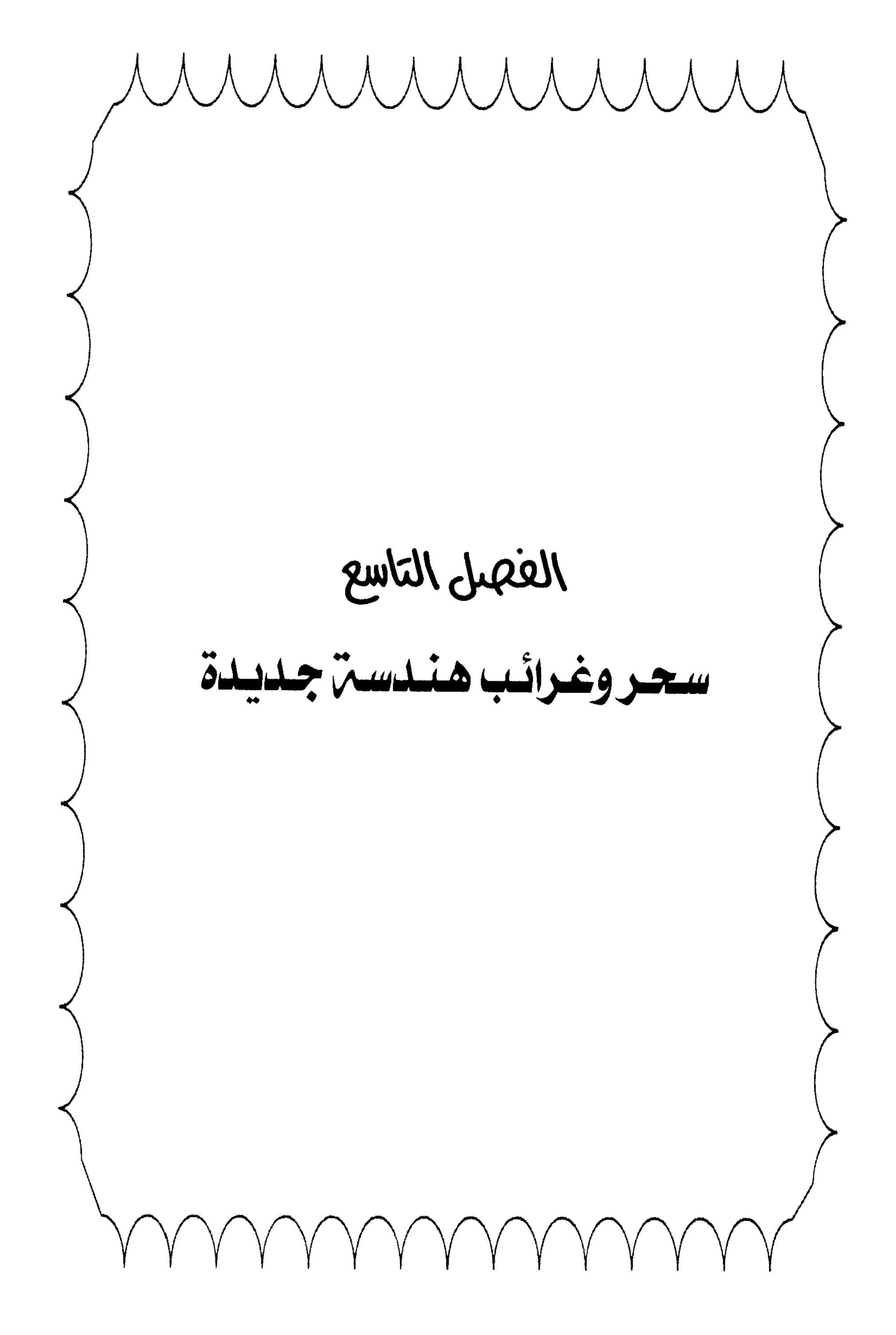
٦ - أربع كتب لسن ١٠ سنوات فأكثر فى سلسلة مجموعة كتب المكعب لتنمية التفكير الهندسى والابتكارى من المجسمات بالهيئة.

٧ - خمس مغامرات لسن ١٢ سنة فاكثر فى كتاب « تنمية العقول العلمية والقلوب الرحيمة ». مغامرات الصبي الخفيف بين السموات والأرض لحل مشكلات الأيتام. بالهيئة.

٨ - ثلاثة كتب وأربعة قصص كرتونية فى كتاب «نم مواهبك الفنية والرياضية من خلال الحلزون مع روابطه وحكايات عليه بالهيئة.

٩ - خمسة كتب جامعية (منشور فى عالم الكتب أربعة منها والرابع فى هيئة الكتب بوزارة التربية والتعليم.

ملاحظة : البحث منشور فى كتاب المؤتمر الأول لمشروع اقرأ لطفلك ـ اعداد مركز تنمية الكتاب ـ اصدارات الهيئة المصرية العامة للكتاب ٢٠٠٢.

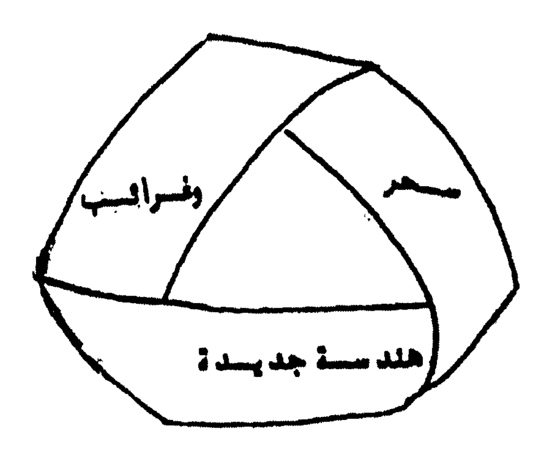


الفصل التاسع

سحر وغرائب هندسة جديدة

الفصل التاسع

سحـــر وغرائب هنـدسة جديـدة
أفكار عامة لسن ١١ سنة فأكثر لتنمية
التفكير الهندسي الابتكارى للجميع



مقدمة:

كلنا شاهدنا أشياء تقع على الأرض، شئ يقع من يدك أو من أى مكان على الأرض. وقد تصاب بضيق إذا كان الذى وقع انكسر، أو نلهو ونلعب ونتسابق للحصول عليه إذا كان ذا فائدة. إلا أن شخصا محبا للرياضيات شاهد تفاحة وهى تقع على الأرض من شجرة وهو فى حالة تأمل، ولم يمر عليها مر المكرام، واكتشف منها قانون الجاذبية... كلنا نعرفه أنه نيوتن.

معظمنا يلهو ويلعب على شاطئ البحر، وكل ما يهمنا أن الموج غير عال، وأن البحر مناسب للعب والاستحمام، إلا أن بعض العلماء أثناء لعبهم واسترخائهم تأملوا حركة الموجات واكتشفوا منها قوانين ساعدت فى دراسة الحركة الموجية

(*) ملاحظة: هذا أول كتاب فى السلسلة، قدِّم إلى الهيئة المصرية العامة للكتاب ١٩٨٦ وطبع الكتاب الثالث منها فى ١٩٨٩ ونفذ.

واستزادوا علما ليطبقوها فى أرجاء بعيدة عن الماء والبحر كعلوم الفضاء والكهربية والحاسبات.

بعضنا يحب اللعب بالألغاز وحلها كألغاز عيدان الشقاب والغاز الأعداد والغاز الأشكال الهندسية. ولكنه يكسل أن يمتد بتفكيره ليكتشف سر عمل اللغز أو يحاول عمل لغز آخر مثله.

نريد أن نحررك من هذا الكسل ونثير اهتمامك باختراعات واكتشافات غريبة عليك فى مجال الرياضيات، ونقدم لك أفكاراً لهندسة جديدة ولدت من اللعب والألغاز والحيل وألعاب السحر. ولم يقف الرياضيون عند مجرد اللعب بها، ولكن تأملوا وتعمقوا واكتشفوا وبنوها كعلم جديد به قوانين ونظريات وله استخدامات شتى حتى فى علوم الفضاء والكمبيوتر.

نحاول فى هذا الكتاب أن نعودك على الملاحظة من اللعب أو من التعامل بالأشياء والأفكار وأن نقدم اللعبة واللغز والحيلة والسحر والمعلومة ليس غاية فى حد ذاتها ولكنها كوسيلة لتقوى قدرتك على الملاحظة وتكتشف منها الأساس الرياضى بأسلوب ممتع ومثير للتفكير الابتكارى (الخلاق). وذلك من خلال نشاطك ولعبك مع الأصدقاء وللتعرف على هندسة جديدة واستخدامات بسيطة لها.

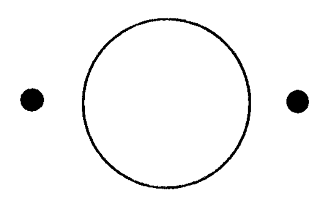
وأود أن أذكرك يا عزيزى القارىء أن القوانين وأسرار الكون لا تكون ظاهرة ولكن تحتاج إلى المثابرة والتفكير فى بواطن الأمور. فمثلا كلنا نرى الشمس تشرق من مكان وتغرب فى مكان آخر ويبدو من الظاهر أن الأرض ساكنة والشمس هى التى تدور حولها ولكن الحقيقة عكس ذلك فالارض هى التى تدور حول الشمس كما تعلمنا. فسبحانه ... «يعلم السر وأخفى»... حتى نستغل كنز التفكير فى البحث بصبر. فأسرار الكون لا يعطيها الله لعباد كسالى ولكن لعباد تعبوا وصبروا فنالوا جزاء أعمالهم فكما يقول سبحانه... ﴿إنَ في ذلك لآيات لكُلِّ صبَّار شكُور﴾...

وعلى ذلك فقد حرصت من خلال هذا الكتاب أن أحررك يا عزيزى القارئ من

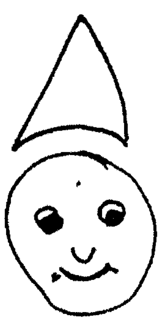
كسلك وأدربك على العمل بصبر وأشغلك بأعمال باطنها أفكار رياضية جديدة غريبة أساعدك على تأملها وملاحظتها واكتشافها.. لأربى فيك أيضا قدرتك على التفكير فى بواطن الأمور وأزرع فيك الصبر والمثابرة.

٩-١- بعض أفكار للهندسة الجديدة فى متناول يد طفل صغير:

إذا رسمنا حدود وجه وطلبنا من طفل صغير دون الثالثة أن يرسم العينين فإن الطفل يرسم العينين خارج حدود الوجه وذلك لأنه لا يفرق بين ما هو داخل وماهو خارج حدود الوجه.



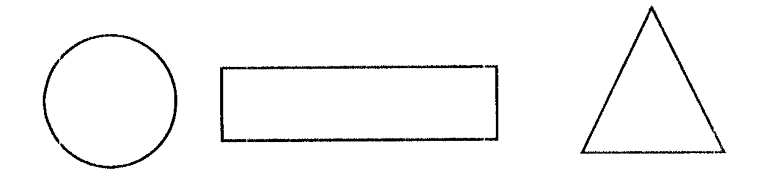
وإذا رسمنا وجه لمثل هذا الطفل وطلبنا منه رسم برنيطة أو طرطور نجده يرسمه بعيداً عن الوجه.



وذلك لأنه لا يفرق بين شكل متصل وشكل غير متصل.

بعد سن الثالثة يمكن للطفل أن يرسم العينين داخل الوجه ويرسم الطرطور ملاصق له. ونقول أن فكرة الداخل والخارج والحدود والاتصال نمت فى ذهنه وأصبحت فى متناول يده.

إذا طلبنا من طفل بعد سن الثالثة رسم مثلث، مستطيل، دائرة مثل

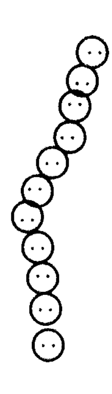


فأنه لا يستطيع التمييز بين هذه الأشكال ويرسم أشكال قريبة من بعضها مثل.



الأشكال التى يرسمها تكون أقرب إلى شكل منحنى متصل نسميه منحنى مقفول بسيط.

إذا طلبنا مـن طفل بعد سن الثالثة وضـع عدة زراير على استقامة (أى بـلغته فى خط أو طريق طوالى)، فإنه يضعها متعرجة كل زرار يجاور الآخر.



ونقول أن فكرة الاستقامة لم تتكون فى ذهنه بعد ولكن فكرة شئ بجوار شئ أى فكرة المجاورة فى متناوله.

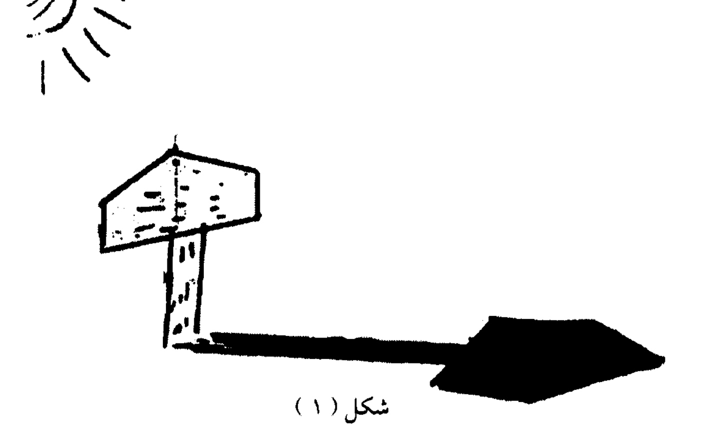
وعلى ذلك فالطفل بعد الثالثة يكون نما فى ذهنه أفكار: الداخل، والخارج، والحدود، والاتصال، والجوار. وهذه من الأفكار الأساسية للهندسة الجديدة.

٩-٢- هيا نتعرف على أفكار غريبة للهندسة الجديدة من ملاحظة أشياء نألفها:

مثال الظل : نعرف جميعا خيال أو ظل جسم فى يوم مشمس. فكم من مرة رأينا ظل لجسمنا فى النهار، بالطبع قد يكون الظل أكبر أو أصغر من الجسم تبعاً

للوقت . وعلى أساس طول الظل عرف الإنسان الوقت فى الأزمان البعيدة.

تعال نتأمل الظل ونلاحظ بعض الأشياء : فمثلا نأخذ ظل جسم عبارة عن شكل مسطح كالآتى:



شكل (١)

نلاحظ أن أى جزء من هذا الجسم مهما صغر أو كبر له ظل معين.

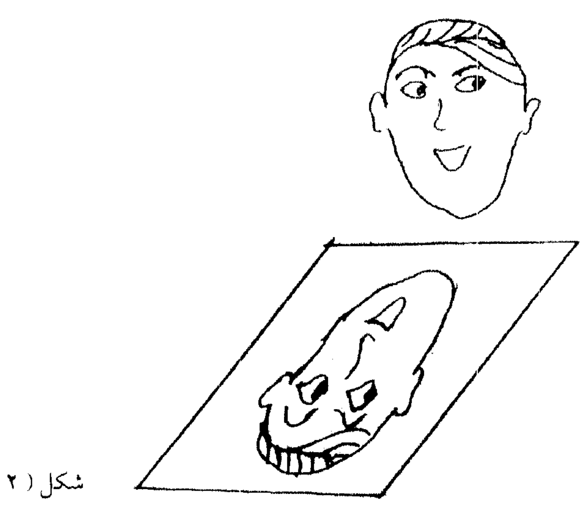
وبالعكس أى جزء من الظل يكون ظلاً لجزء معين من الجسم مهما صغر أو كبر. ومعنى ذلك أن كل نقطة فى الجسم يكون ظلها نقطة وبالعكس. نلاحظ أيضا أن كل الأجزاء المتجاورة فى الجسم يكون ظلها أجزاء متجاورة، كذلك كل الأجزاء المتصلة للجسم يكون ظلها متصل وبالعكس.

أى أن عملية تكوين ظل جسم (مستوى أى مسطح) حافظت على خواص للجسم مثل نقط الجسم وعلى المجاورة وعلى الأتصال ولكنها لم تحافظ على أبعاد الجسم كطوله أو عرضه أو مساحته. نقول إن الجسم المستوى، وشكل ظله متكافئان فى هذه الهندسة ونقول أن عملية تكوين الظل عملية خاصة بهذه الهندسة.

مثال الصورة فى مرآة ملاهى:

هل شاهدت صورتك فى مرآة ملاهى (غير مستوية) ؟ إذا كنت شاهدتها فإنك استمتعت وضحكت من شكلك الذى تغيرت ملامحه، ولكن مهما تغير فهى لوجهك وليس لوجه آخر.

والآن تعال نتأمل صورة وجهك ونلاحظ بعض الأشياء التى تغيرت والتى لم تتغير.



شكل (٢)

فمثلا نجد أن الوجه ازداد استطالة وتغيرت أبعاده بنسب مختلفة ولكن صورة العينين عينان بشكل مختلف ولكن العدد اثنان ولم يتغير إلى ثلاثة عيون أو إلى عين واحدة فقط. كذلك لا نجد جزء فى الصورة ليس له أصل فى الوجه. نجد أيضا ان ما هو داخل حدود الوجه يظل داخل صورة الوجه، وما هو خارج حدود الوجه يكون صورته خارج حدود الوجه فى الصورة.

نقـول إن الصورة حورت الـوجه وان عمـلية تحـوير شكل الـوجه فى هـذه المرآة حافظت علـى نقط الوجه وكل أجزاء الوجـه مهما صغرت أوكبرت، كـما حافظت على المجاورة والاتصال والحدود والداخل والخارج.

نعتبر الـصورة المحُورة فى هذه المرآة والوجه متكـافئين فى هذه الهندسـة وعملية تكوين الصورة بهذا الشكل عملية خاصة بهذه الهندسة.

مثال شكل مرسوم على بالونه:

بالطبع لعبت بالبالونات. إذا كان مرسوم على البالون رسم لشكل فإنك لاحظت أنه بالنفخ يكبر الرسم أو ينبعج.

تعال نتأمل الرسم على البالون قبل وبعد النفخ.



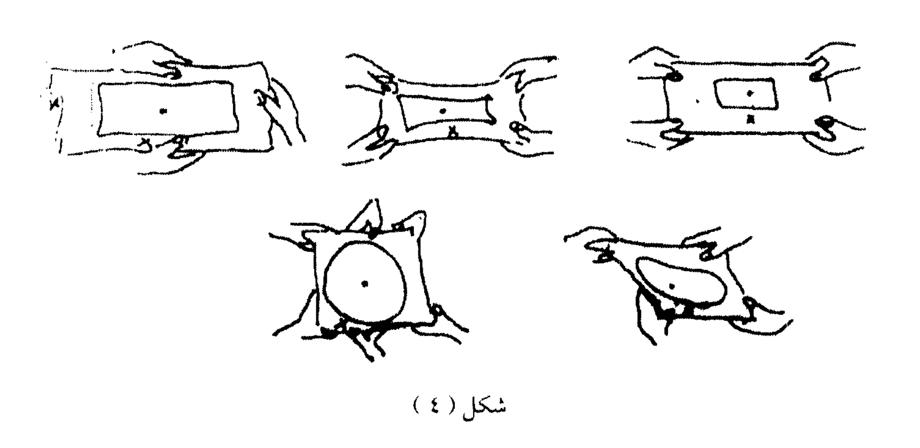
شكل (٣)

نجد كما فى الأمثلة الـسابقة أن شكل الرسم تغير ولكن كل جـزء فى الشكل قبل النفخ له نظير فى الـشكل بعد النفخ مهما كبر أو صغر حتـى ولو كان نقطة . كذلك كل الأجزاء المـتجاورة أو المتـصلة أو الداخلـة أو الخارجة فى الـشكل المرسـوم تظل كذلك بـعد النفـخ. أى أن عملية الـنفخ حافـظت على نقـط وأجزاء الشكـل وعلى المجاورة وعلى الاتصال وعلى الحدود وعلى الداخل وعلى الخارج...

نقول إن الشـكل المرسوم قبل النـفخ يكافئ الشكل بـعد النفخ فى هذه الـهندسة ونعتبر عملية النفخ هذه عملية خاصة فى هذه الهندسة.

مثال شكل مرسوم على ورقة مطاطة :

أحضر قطعة من بالون على شكل ورقة ثم أرسم عليه مستطيل خارجه علامه وداخله نقطة، قم بشد هذه الورقة المطاطة مع زميلك وثنيها دون احداث قطع تجد أن المستطيل يتغير شكله تبعا لطريقة الشد والثنى إلى أشكال مختلفة وتعتبر جميعها متكافئة فى هذه الهندسة ونسمى أى شكل منها منحنى مقفول بسيطSimple closed curve.



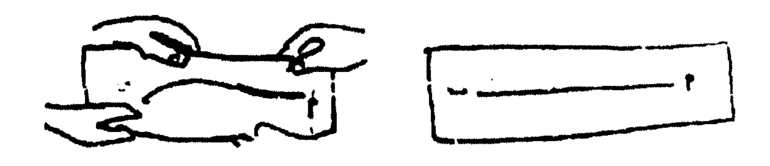
شكل (٤)

فقد يتحور المستطيل إلى شكل أضلاعه محدبة أو إلى شكل منحنى أو إلى دائرة أو إلى شكل مثلث أو مربع.

نلاحظ هنا أن عملية الشد لم تحدث تكبير للشكل كما فى الأمثلة السابقة ولكن أحدثت تحويرا للشكل. ومهما كان الشد أو الثنى فإن النقطة تظل داخل الشكل والعلامة × خارجه. ومعنى ذلك أن عملية الشد حافظت على الداخل، والخارج بالاضافة إلى ما حافظت عليه العمليات السابقة (تكوين الظل ، صورة المرآة، النفخ) من نقط الشكل وأجزائه والمجاورة والاتصال والحدود.

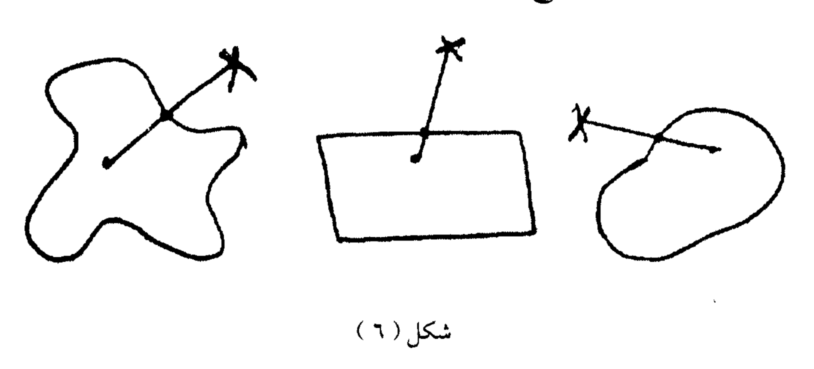
نلاحظ أن الاستقامة لا تحافظ عليها عملية الشد (أو أى عملية فى هذه الهندسة) بالاضافة إلى الطول والأبعاد كما ذكرنا لا تحافظ عليها عملية الشد فمثلا برسم

قطعة مستقيمة أ ب على ورقة مطاطة تجد أنه يـتغير شكلها بالشد ألا أنه يظل طرفاها منفصلين كما فى شكل (٥)



شكل (٥)

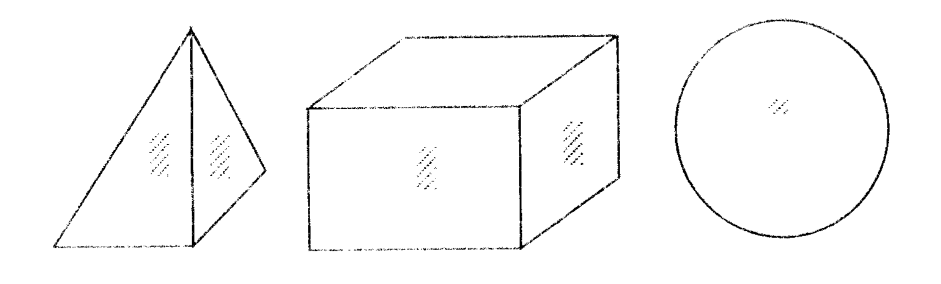
تأمل شكل (٦) وحاول أن تـصل خط بين النقطة داخل أى شكـل فيه والعلامة خارجه تجد أن هذا الخط يقطع الشكل فى نقطة واحدة.



شكل (٦)

مثال تشكيل قطعة من الصلصال:

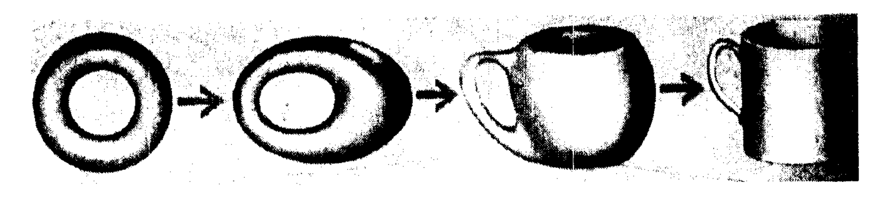
أحضر قطـعة من الصلصـال (أو العجين) ثم أعمـل منها شكل كـرة عن طريق المط والضغـط واللوى دون أن تحدث ثقب أو فتحـه. حولها إلى شكل مـكعب، ثم شكل هرم ثم أشكال أخرى نعتبر هذه الأشكال متـكافئة فى هذه الهندسة، كما نعتبر عملية التشكيل بالمط والضغط دون احداث فتحات عملية خاصة فى هذه الهندسة.



شكل (٧)

تسمى هذه الأشكال شكل كرة.

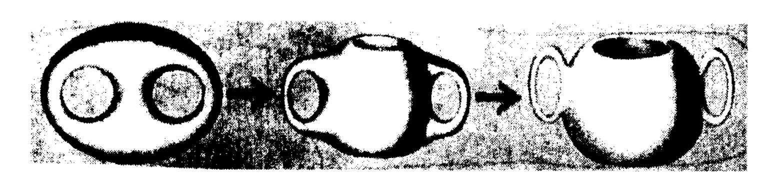
كون شكل كحكة (أو إطار عجلة) ثم حورها بالتشكيل السابق أي بالمط والضغط دون إحداث ثقوب «نافذة» إلي شكل فنجان.. كما في الشكل التالي. كل هذه الأشكال في شكل (٨) نعتبرها متكافئة في هذه الهندسة انظر شكل(٨).



شكل (٨)

تسمى هذه الأشكال شكل كرة بفتحة واحدة.

كون شكل كحكة بفتحتين ثم حورها بالتشكيل (بالمط والضغط دون احداث ثقوب) إلى شكل فنجان بودنين (سكرية) ... كما فى الشكل التالى له). كل هذه الأشكال نعتبرها متكافئة فى هذه الهندسة.



شكل (٩)

تسمى هذه الأشكال بشكل كرة بفتحتين.

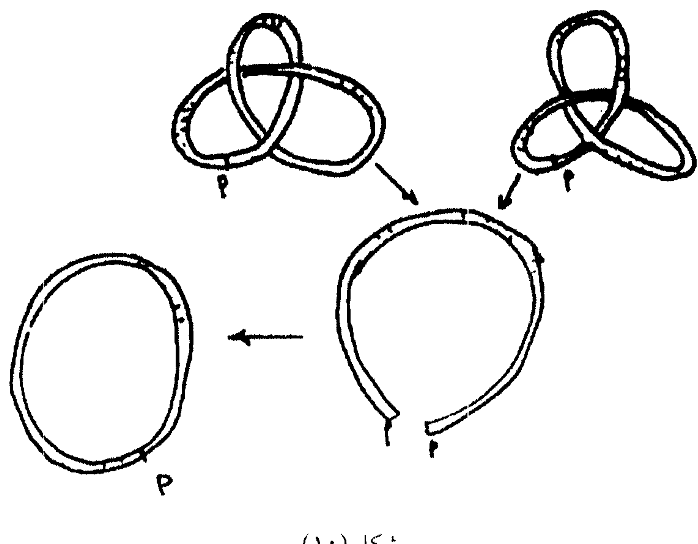
ملاحظة : نقصد بشكل الكرة أو شكل الكرة بفتحة أى شكل الكحكة بالسطح الخارجى فقط كأن داخلها مفرغ.

نلاحظ أن العمليات الخاصة بهذه الهندسة والتى بسطناها فى الأمثلة السابقة مثل عملية تكوين الظل وعملية تكوين صورة فى مرآة ملاهى وعملية النفخ وعملية الشد وعملية التشكيل كلها عمليات تحور الشكل إلى أشكال مُحورة مكافئة ولذا نسميها بعمليات تحوير deformation . يوجد عمليات خاصة بهذه الهندسة أخرى غير عمليات التحوير كالتى نذكرها فيما يأتى:

مثال القص واللصق أو القص والخياطة - أى القص والوصل:

أحضر أستك أو خيط دوبارة وكون منه عقدة كما فى الشكل التالى. حاول أن

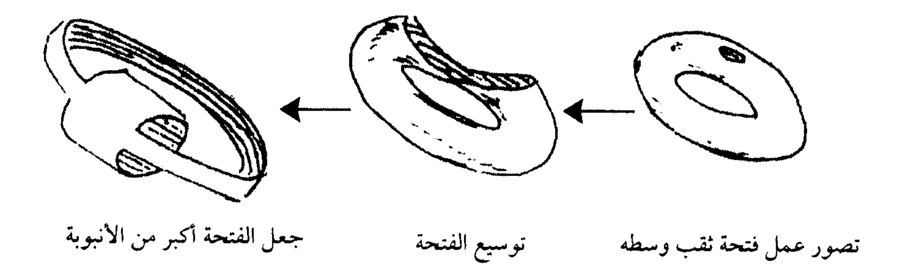
تحول العقدة بأى عملية تحوير (شد أو انكماش أو تشكيل) إلى شكل دائرة فلن تستطيع. قص أو اقطع عند نقطة أ ثم افرد وصل (باللصق أو الخياطة) عند نفس المكان تصل إلى شكل دائرة. عملية القص (ثم الفرد) ثم اللصق هى عملية خاصة فى هذه الهندسة ولكنها ليست عملية تحوير مثل عمليات الشد أو المط أو تكوين الظل وعلى ذلك فاى عقدة فى هذا الشكل (١٠) تكافئ دائرة تكافئ منحنى مقفول بسيط فى هذه الهندسة الجديدة.

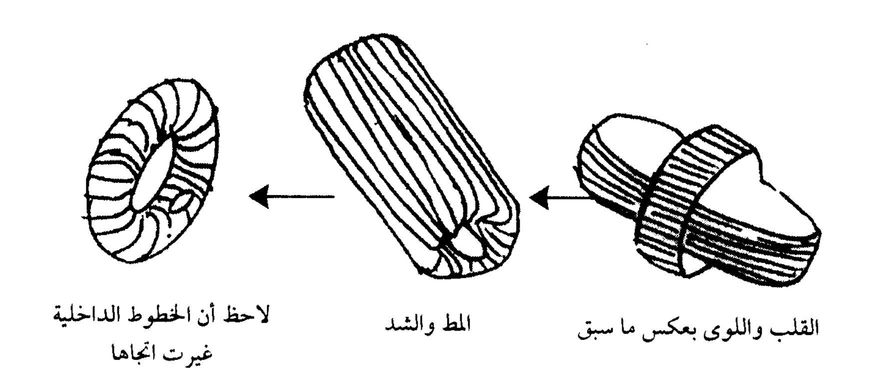


شكل (١٠)

٩-٣ - للقارىء الأكبر سنا : عمليات أخرى فى هذه الهندسة الجديدة:

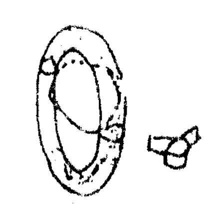
يوجد عملية أخرى خاصة بهذه الهندسة وهى عملية قلب الشكل كقلب كرة (مجوفة) مطاط أو إطار عجلة (شكل الكحكة) - يمكن للقارىء الأكبر أو المتخصص أن يتعرف عليها من خلال تتبعه لشكلى (١١ ، ١٢) وهى عملية تسمح بالتحوير.



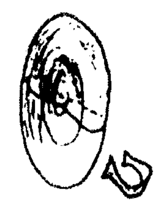


شكل (١١)

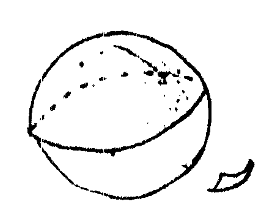
قلب شكل اطار عجلة



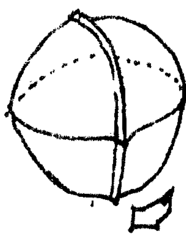
يبدأ ظهور السطح الداخلي



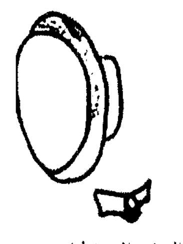
تصور انزلاق السطح الداخلي من خلال السطح الخارجي



بالضغط على الجانبين ناحية المركز



تكون الكرة

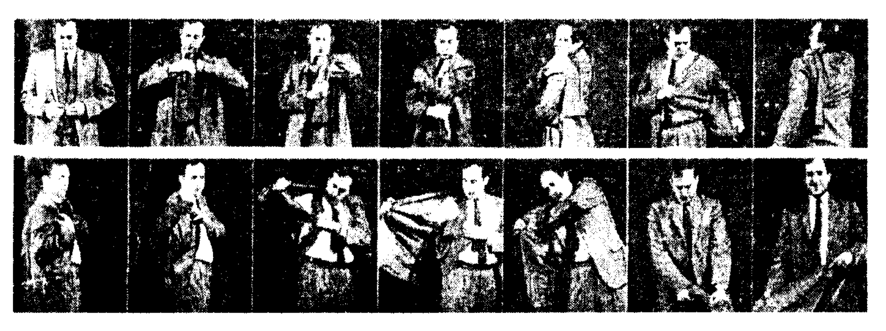


بالدفع إلى الخارج

شكل (١٢)

قلب كرة . الأجزاء الصغيرة بجانب كل شكل توضح قطعة من السطح أثناء عملية القلب.

ومن الطريف ان عملية خلع صديرى ماط (جرسيه) فوق جاكته هى عملية (تحوير) فى هذه الهندسة حاول بنفسك أن تخلع صديرى (آو جيليه) ملبوس فوقه جاكت . استعن بالشكل التالى:



شكل (١٣)

وأسهل من ذلك خلع قميص بحمالات فوقه فانلة.

وعموما فالعمليات الخاصة فى هذه الهندسة سواء عمليات تحوير أو قص ووصل أو قلب مع التحوير أهم ما يميزها كما ذكرنا أنها تحافظ على نقط الشكل وأجزائه مهما صغرت. ومعنى ذلك أن العملية تحول الشكل إلى شكل يكافئه بحيث أن كل نقطة فى الشكل الأصلى تناظر نقطة فى الشكل المكافئ وبالعكس وبحيث أن أى جزء واقع بين نقطتين مهما صغر يناظر جزءاً مهما صغر فى الشكل المكافئ وبالعكس أى أننا لو آخذنا نقطتين فى الشكل الأصلى أ ، ب وقربنا ب جدا من أ حتى تقترب المسافة بينهما من الصفر فان النقطتين المناظرتين على الشكل المكافئ المسافة بينهما تقترب أيضا من الصفر وبالعكس.

٩ - ٤ - ما اسم الهندسة الجديدة والعمليات الخاصة بها ؟

يسمى البعض هذه الهندسة بهندسة ورقة المطاط لأن بعض عمليات التحوير يمكن توضيحها عن طريق رسم شكل على رقة المطاط يتحور إلى شكل يكافئه شكل (٤ ، ٥). ولكن الاسم العلمى لهذه الهندسية هو "توبولوجى" Topology وهو اسم بالانجليزية مشتق من كلمة أغريقية تقرأ توبوس ومعناها المكان والموقع.

نسمى العمليات بهذه الهندسة مثل عمليات التحوير أو القص والوصل أو القلب بعمليات توبولوجية أو "تحويلات توبولوجية " ولكننا لن نستخدم هذا الاسم.

والآن تعال نوسع تفكيرك لتكتشف غرائب لاشكال متكافئة لهذه الهندسة منها أشكال صغيرة جداً تكافئ أشكال كبيرة جداً وأشكال بسيطة تكافئ أشكال معقدة وتصل منها إلى بعض قواعد غريبة.

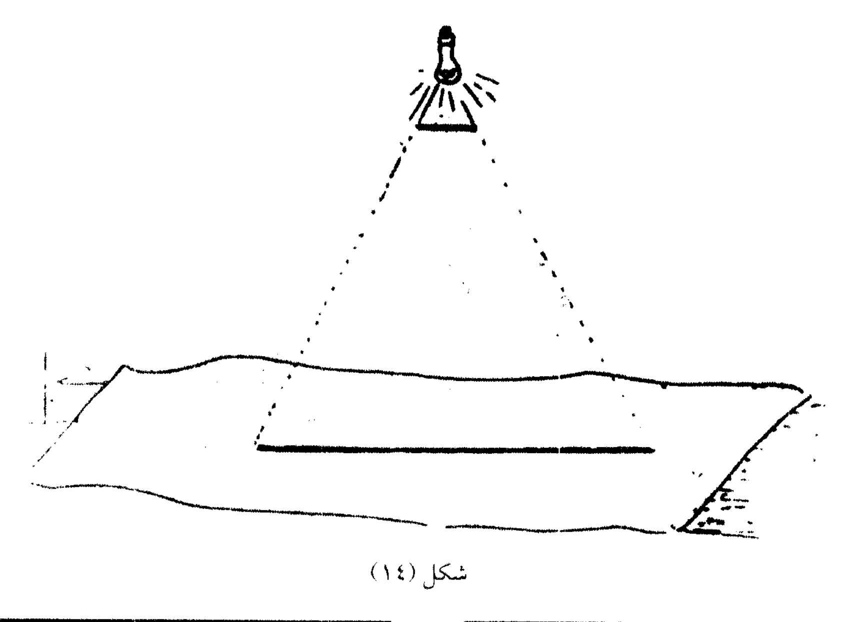
٩ - ٥ - غرائب أشكال متكافئة فى هذه الهندسة - أشكال متكافئة توبولوجيا:

هل تتصور ان عدد نقط قطعة مستقيمة هى نفس عدد نقط خط مستقيم مهما طال.

تعال نتحقق من ذلك من خلال المثال التالى:

أولا: تعال نلاحظ ظل قطعة مستقيمة تحت لمبة كهربائية.

خذ قطعة سلك قصيرة وضعها تحت لمبة كهربائية مضيئة فى غرفة. وحدد ظلها على الأرض تجد أن الظل أطول من السلك. ولكنه ظل مستقيما.



شكل (١٤)

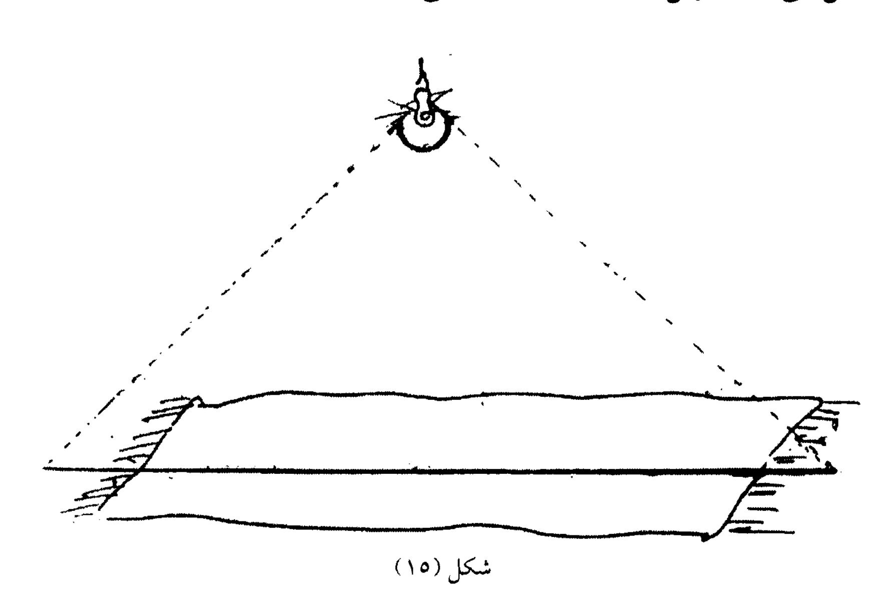
تذكر أن عملية تكوين الظل عملية خاصة فى الهندسة (عملية توبولوجية) وأن السلك وظله متكافئان فى هذه الهندسة.

اثنى السلك ليكون على شكل نصف دائرة وضعه أسفل اللمبة تجد أن السلك شكل نصف الدائرة ظله فى وضع معين يكون قطعة مستقيمة.

ويعنى ذلك أن نصف الدائرة والقطعة المستقيمة متكافئان تحت عملية تكوين الظل فى هذه الهندسة.

قرب هذا السلك الذى على شكل نصف دائرة إلى اللمبة تجد ان ظله استطال

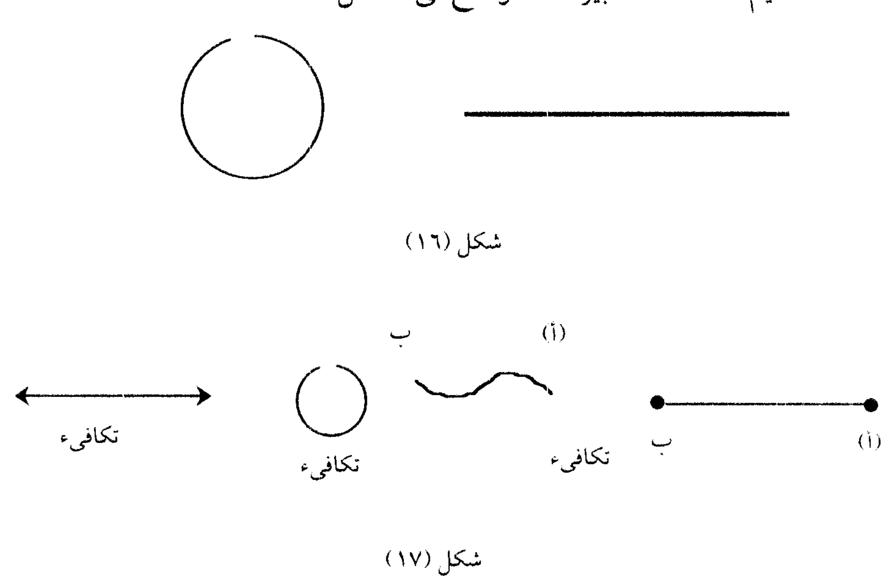
- استمر فى التقريب نجد ان الظل امتد امتدادا كبيراً على شكل خط مستقيم حتى يصل الى خط طويل جدا جدا (قد يمتد الى الجدران).



شكل (١٥)

ويعنى ذلك ان القطعة المستقيمة أ ب تكافئ نصف الدائرة وتكافئ خط مستقيم (ممتد امتدادا كبيرا) فى هذه الهندسة. أى أننا نعتبر أى قطعة مستقيمة مهما صغرت فى هذه الهندسة مكافئة لخط مستقيم طويل جدا جدا.

وقد عرفنا أن عملية الظل (كعملية تحوير أو عملية توبولوجية) خاصة بهذه الهندسة تحافظ على النقط. أى أن كل نقطة على قطعة مستقيمة مهما صغرت تناظر نقطة على الظل وهو المستقيم. وبالعكس كل نقطة على الظل لها أصل على القطعة المستقيمة. أى يوجد تناظر بين نقط القطعة المستقيمة والخط المستقيم. ومعنى ذلك ان عدد نقط أى قطعة مستقيمة مهما صغرت القطعة هى نفس عدد النقط على خط مستقيم مهما طال هذا الخط. ويبدو هذا غريبا للتصور ولكنه صحيحا إذا دققنا فى باطن الأمر عن طريق فكرة مناظرة نقط الشكل بنقط الشكل المكافئ له تحت عملية خاصة فى هذه الهندسة. الا أن هذا ليس بأغرب من أن نتصور أن الأرض تدور حول الشمس كما ذكرنا فى المقدمة. وعموماً فعدد النقط على القطعة المستقيمة أو على كل المستقيم كثيرة جدا جدا ولا يمكن عدها ونقول ان عددها لا نهائى لا يمكن عده. نلاحظ أن قطعة السلك يمكن تحويرها بالثنى إلى شكل دائرة مقطوعة يقترب طرفيها من بعض ولكن لا يلتصقان. ومعنى ذلك أن القطعة المستقيمة تكافئ دائرة منزوع منها نقطة. من شكل ٥، شكل ١٥، شكل ١٦ نستنتج أنه فى هذه الهندسة تكون القطعة المستقيمة تكافئ خط معرج وتكافئ دائرة منزوع منها نقطة وتكافئ خط مستقيم ممتد امتدادا كبيراً كما نوضح فى الشكل (١٧).



شكل (١٦)

شكل (١٧)

ثانيا: تعال نتأمل ظل نصف كرة:

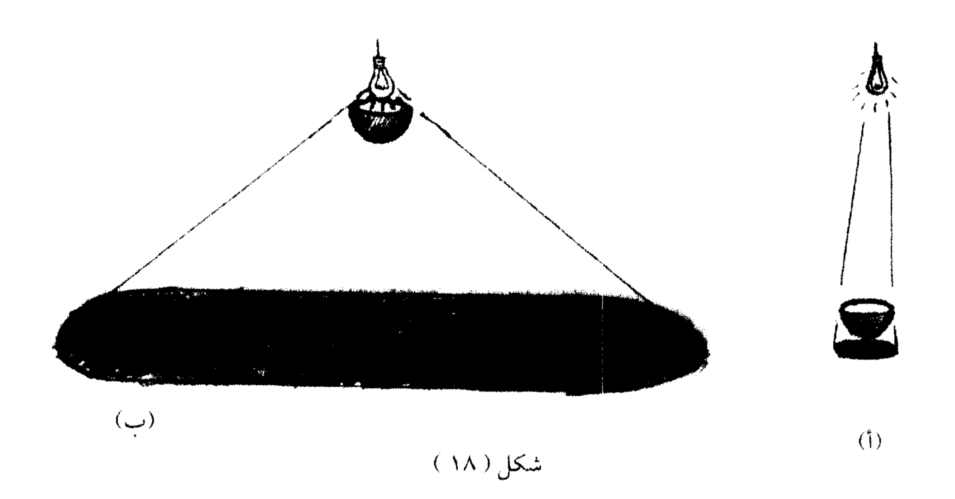
بنفس الأسلوب السابق، الموضح فى شكل ١٤ تعال نكتشف ظل نصف كرة.

احضر سلطانية على شكل نصف كرة أو إقطع كرة بلاستك نصفين لتحصل على نصف كرة (مجوفة)، وضعها على الأرض أسفل لمبة كهربائية مضيئة وحدد ظلها، نجد أن الظل على شكل قرص. قرب السلطانية (أو نصف الكرة) تدريجياً من اللمبة نجد ان الظل يكبر. ثم قرب السلطانية حتى تكاد تغطى الجزء المضئ فى اللمبة تجد ان الظل امتد امتدادا لكل أرض الحجرة ولو لم تجد الجدران لامتد امتدادا أكبر. انظر شكل (١٨).

ومعنى ذلك ان سطح نصف الكرة والقرص وكل المستوى مهما امتد من جميع أطرافه كلها اسطح متكافئة فى هذه الهندسة.

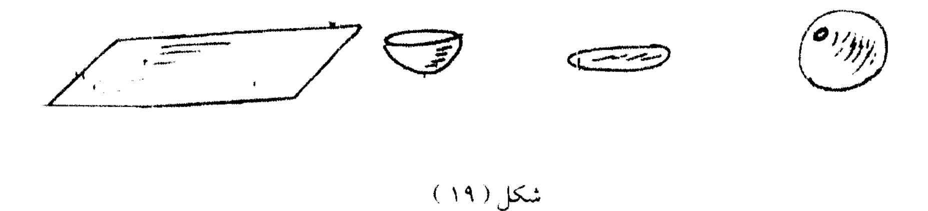
أى أننا يمكن ان نستخدم سطح نصف كرة كنموذج لسطح مستوى كبير جدا فى هذه الهندسة.

نلاحظ أنه لو كانت نصف الكرة من مادة مطاطه أو من صلصال يمكن أن نحورها بالتشكيل ونصغر فتحتها بالمط والانكماش لتكون على شكل كرة منزوع منها نقطة.



شكل (١٨)

وعلى ذلك فـإنه فى هذه الهنـدسة تكون الكرة (المجـوفة) المأخوذ منهـا نقطة أى الكرة المثقوبة بثقـب واحد (غير نافـذ) تكافئ نصـف كرة وتكافئ قرص وتـكافئ مستوى ممتد من جميع أطرافه استدادا كبيراً كما نوضح بالشكل (١٩).



شكل (١٩)

ثالثا: للقارئ الأكبر سنا (أو المتخصص) تعال نلاحظ شكل بسيط يكافئ

شكل معقد بنفس فكرة العقدة التى تكافئ دائرة فى شكل (١٠) السابق. يمكن أن نوضح أن شكل الكحكة المعقودة يكافئ شكل الكحكة بفتحة واحدة انظر شكل (٢٠).

الكحلة المعقودة

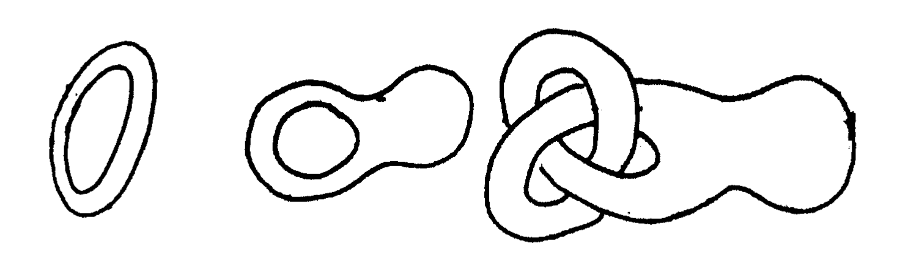
القطع مع توضيح اتجاه القطع

الفرد والمط

الوصل (الخياطة) عند النقط بنفس الاتجاه

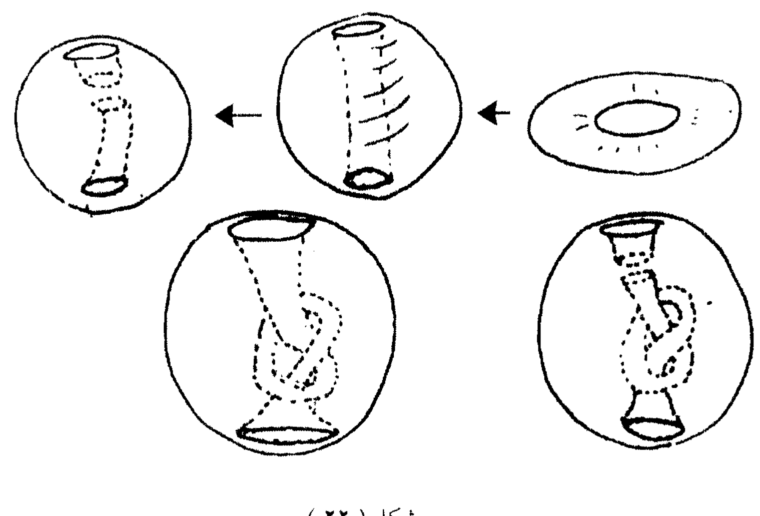
شكل (٢٠)

وبالمثل فإن الشكل التالى (٢) يكافئ أيضا شكل الكحكة عن طريق القطع والوصل، ثم التشكيل بالمط والثنى والانكماش دون عمل قطع أو فتحه.



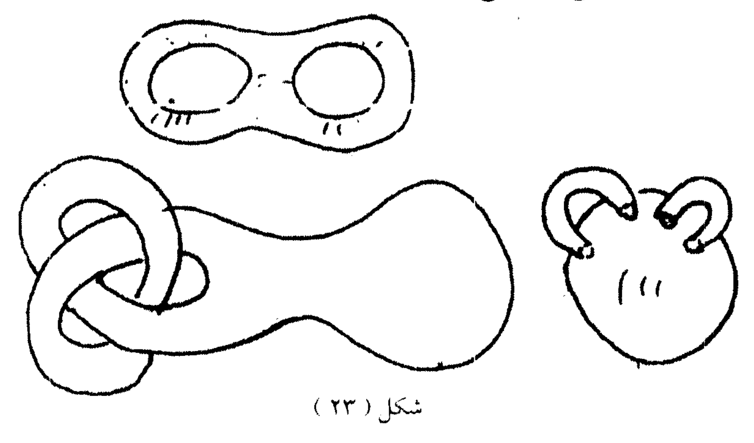
شكل (٢١)

والأعجب من الأمثلة السابقة أن الكرة التى لها ثقب معقود (بعقدة) محفورة خلالها تكافئ شكل الكحكة (اطار العجلة) أو شكل الكحكة المعقودة فى هذه الهندسة. حاول توضيح ذلك مع الاستعانة بالشكل التالى (٢٢).



شكل (٢٢)

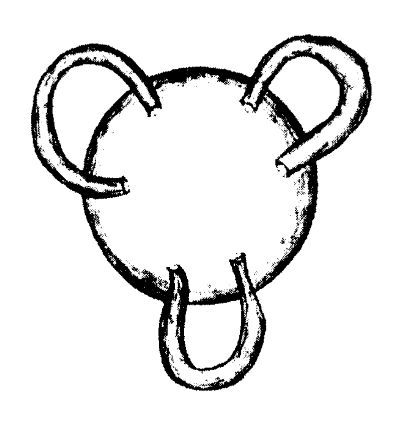
كذلك شكل الكحكة بفتحتين (أو شكل اطار العجلة بفتحتين) يكافئ شكل كرة بودنين (بأذنين) أو بيدين ويكافئ شكل كحكة بفتحتين معقودتين فى هذه الهندسة. حاول توضيح ذلك مع الاستعانة بالشكل التالى (٢٣).



شكل (٢٣)

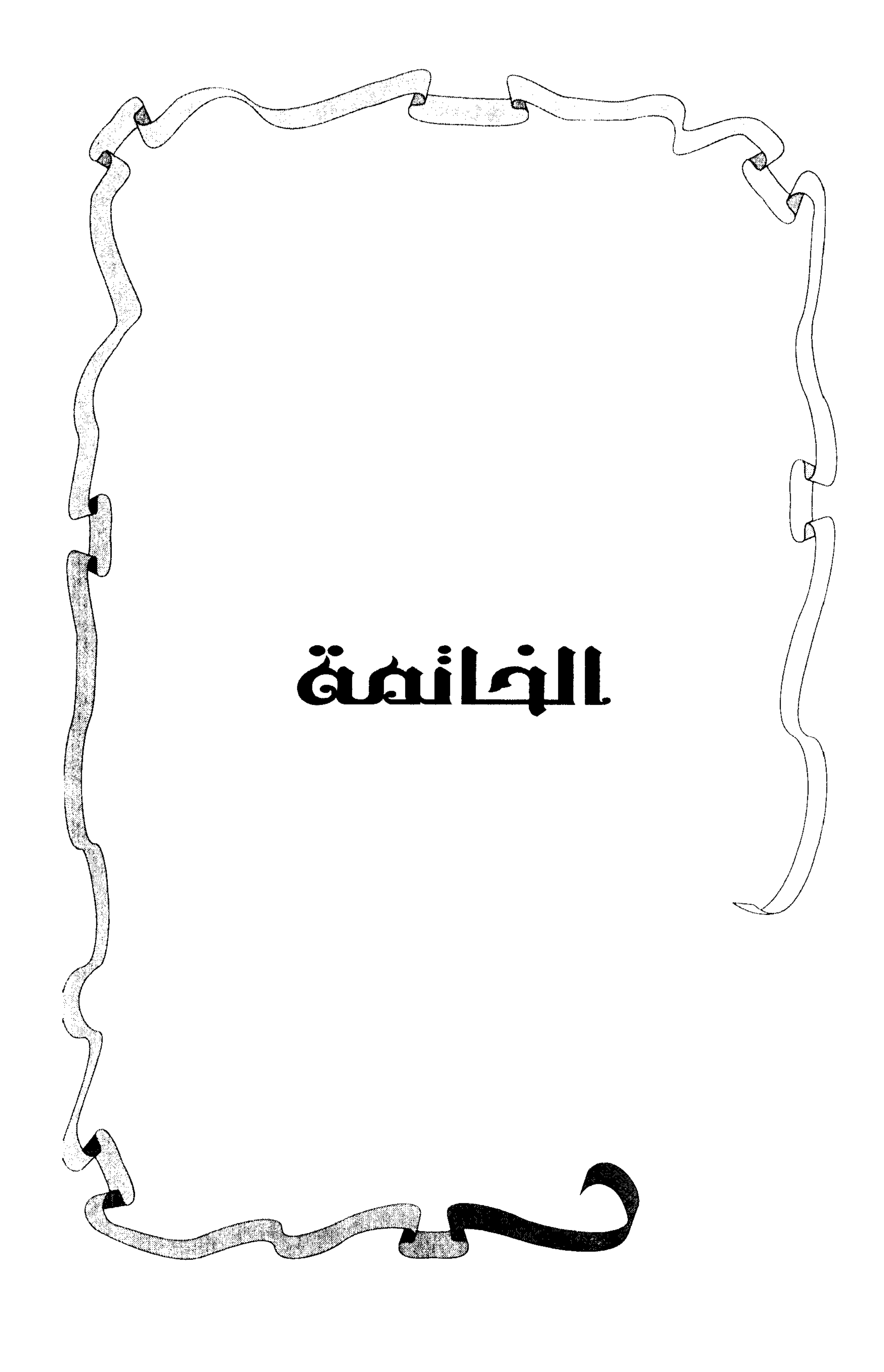
وأيضا كرة بثلاثة أيادى تكافئ شكل الكحكة بثلاثة فتحات وأيضا تكافئ كرة بثلاثة ثقوب bored خلالها وأحد الثقبين ملضوم داخل الثقب الآخر.

حاول توضيح ذلك مع الاستعانة بالشكل التالى (٢٤).



شكل (٢٤)

والأن حاول القراءة مرَّة أخرى مع تنفيذ ما طلب منك عمله وملاحظته، وشارك الأصدقاء والإخوة فيما توصلت إليه واستمتعت به.



الخاتمة

قبل أن أنهى هـذا الكتاب أود أن أذكر أنه أخذ منى مـجهوداً كبيراً ووقتاً يمـتد لسنوات منذ أن كـان فكرة فى ذهـنى حتى كتـابة المسودات وتـنـقيحهـا وإضافة اللمـسات النهـائية. وأتوقع أنك بذلت مجهوداً كبيراً فى متابعتـه. وأشعر أنك راض عما حصلته واستفدته منه مهما كان قليلا من القراءة الأولى وسيكـون ذلك حافزاً لدفعك لعدة قراءات نشطة أخرى حتـى تستـوعب شيـئاً فشيـئا المـوضوعات المخـتلفـة فى هذا الـكتاب. ثـم تجد مقـدراتك الأبتكارية التدريسية تنطلق وتنمو لتحسين وتطوير الرياضيات المدرسية (مادة وطريقة).

وتتطلع بعد ذلك لمعرفة المزيد عن هذه الـهندسة (أو الرياضيات العصرية) من المصادر الأخرى (كتب ـ مجلات علمية ـ مواقع على الأنترنت ..)

ربما تكون قد لاحظت أننى فى أجزاء كثيرة أقدم مـعلومات تاريخية أو علمية أو تربوية قد تبدو أنها بـعيدة أو غير مرتبطة بالـسياق الرياضى، وذلك بقصد إتـاحة الفرصة لإراحة ذهنك بعد جـرعات رياضية غير مألـوفة تستدعى تركيـز وتفاعل كبير قد تـرهقك. وأيضا لإعطاء الفـرصة لتخميـر وتحضين الأفكار الريـاضية تمهيدا لانطـلاقها فى أعمال ابـتكارية تدريسيـة أو حتى لإعطاء الفرصة لمـزيد من الأستيعاب والـفهم والتخيل وإعطـاء معنى .. وقد راعيت استمـرارية الخط الفكرى فى الفصول المختـلفة لتقديم محتوى مبـسط متكامل لهنـدسة الفراكتـال يشبع العـقل والوجدان ويثير الخيال والإحسـاس ويدفع إلى التـفاعل والعمل الابتكارى الرياضى

وقد كنـت أود أن يشتمل مـحتوى الكتـاب على نبـذة مستقلـه عن الهيولـيه أو جوازاً الفوضى chaos ولكننى وجدت أن ذلك يستدعى متطلبات تعليمية لدوال الفروق المركبة، والدوال التفاضلية غـير الخطية تأخذ مساحة أكبر ومن ثم فضلـت أن تكون ضمن الأنشطة التحـديدة (فى الكتاب التالى بإذن الله).

وأخيراً أرجو أن يـحقق الكتاب أهـدافه فى تنمية اسـتقلاليه التـعلم للمعـلم فى دراسة الرياضيات المعاصرة وتنمـية ابتكاره التدريسى ليسهم مساهمة فعـاله فى تطوير الرياضيات المدرسية لإعداد جيل من الرياضيين الإبتكاريـين يسهم فى التطور الحضارى للقرن الواحد والعشرين.

مطابع آمـون

٤ الفيروز من ش إسماعيل أباظة
لاظوغلي - القاهرة - ج م ع
ت : ٧٩٤٤٥١٧ - ٧٩٤٤٣٥٦